المصفوفات

تعريف المصفوفة :- هى طريقة تنظيم للبيانات أو المعلومات فى شكل صفوف (أفقية) و اعمدة (رأسية) توضع بين قوسين قوسين من النوع (   )

نظم المصفوفة :- إذا كان عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد أعمدة المصفوفة = ن

تكون المصفوفة على النظم = م × ن

أمثـــــــلة

① $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ على النظم : ٢ × ٣

② $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم : ٢ × ٢

③ $ص = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ على النظم : ١ × ٣

تسمية المصفوفة : تسمى المصفوفة بأحد الأحرف الكبيرة (أ ، س ، ص ، ....)

أمثـــــــلة

① محلان لبيع الأدوات الكهربائية : فى أحد الأيام باع المحل الأول ٥ خلاطات ، ٦ مراوح ، ٣ ثلاجات و باع المحل الثانى ٤ خلاطات ، ٩ مراوح ، ٣ ثلاجات اكتب مصفوفة المبيعات على النظم ٢ × ٣

الحــــــــــل

$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$ (لاحظ أن : عدد الصفوف = ٢ ، عدد الأعمدة = ٣)

② اذا كان احد المصانع له فرعان و ينتج ثلاثة أنواع من السلع (تلفزيون ، غسالة ، ثلاجة) و كان الفرع (س) ينتج : ٥٠ تلفزيون ، ٤٠ غسالة ، ٣٥ ثلاجة و كان الفرع (ص) ينتج : ٧٠ تلفزيون ، ٣٠ غسالة ، ٢٥ ثلاجة أكتب هذا المصنع على شكل مصفوفة بطريقتين

الحــــــــــل

$أ = \begin{pmatrix} ٣٥ & ٤٠ & ٥٠ \\ ٢٥ & ٣٠ & ٧٠ \end{pmatrix}$ أ، $أ = \begin{pmatrix} ٧٠ & ٥٠ \\ ٣٠ & ٤٠ \\ ٢٥ & ٢٥ \end{pmatrix}$

موقع العناصر فى المصفوفة : فى المصفوفة (أ) يكون العنصر ($أ_{ص ع}$) الذى يقع فى الصف (ص) ، العمود (ع)

أمثـــــــلة

① إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ اكتب نظم المصفوفة (أ) ثم أوجد : $أ_{٢١}$ ، $أ_{٣٢}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{١٣}$

الحــــــــــل

المصفوفة (أ) على النظم : ٣ × ٣

$أ_{٢١} = ٣$ $أ_{٣٢} = ٥$ $أ_{٢٢} = ٩$ $أ_{١٣}$ ع= −٢

تدريـــــب :-

فى المصفوفة (أ) = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ ١٠ & ٧ & ٤ \\ ٠ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة : $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $أ_{٣٣}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٣٣}$

② **أكتب بطريقة السرد المصفوفة ($أ_{صع}$) حيث : $أ_{صع}$ = ع − ص و المصفوفة (أ) على النظم ٢ × ٣**

الحـــــــــــــل

$أ_{١١}$ = ١−١ = ٠ $أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١ $أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ٢−١ = ١ $أ_{٢٢}$ = ٢ − ٢ = ٠ $أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(لاحظ أن : عدد الصفوف = ٢ ، عدد الأعمدة = ٣)

③ **أكتب المصفوفة ($أ_{صع}$) على النظم ٣ × ٣ حيث : $أ_{صع}$ =**
$\begin{cases} ص + ع & \text{عندما : ص > ع} \\ ٢ & \text{عندما : ص = ع} \\ ع − ص & \text{عندما : ص < ع} \end{cases}$

الحـــــــــــــل

$أ_{١١}$ = ٢ $أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١ $أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ٢+١ = ٣ $أ_{٢٢}$ = ٢ $أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

$أ_{١٣}$ = ٣+١ = ٤ $أ_{٢٣}$ = ٣ + ٢ = ٥ $أ_{٣٣}$ = ٢

∴ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

<u>بعض المصفوفات الخاصة</u>

$\boxed{١}$ **<u>مصفوفة الصف :</u> هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد و أى عدد من الأعمدة (م = ١)**

أمثـــلة : ① س = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ١ \end{pmatrix}$ ② ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$\boxed{٢}$ **<u>مصفوفة العمود :</u> هى المصفوفة التى تتكون من أى عدد من الصفوف و عمود واحد فقط (ن = ١)**

أمثـــلة :

① س = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$ ② ص = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

$\boxed{٣}$ **<u>المصفوفة المربعة :</u> هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة بحيث (م = ن)**

أمثـــلة :

① س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & ٢- \end{pmatrix}$ ② ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & ١- \end{pmatrix}$

$\boxed{٤}$ **<u>المصفوفة الصفرية :</u> هى المصفوفة التى كل عناصرها أصفار و رمزها ☐ " مستطيل صغير "**

مثـــال : ☐ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ **مصفوفة صفرية على النظم (٢ × ٣)**

$\boxed{٥}$ **<u>المصفوفة القطرية :</u> هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى أحدهم على الأقل لا يساوى صفر**

$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

[٦] **مدور المصفوفة :** لأى مصفوفة على النظم (م × ن) إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مدور المصفوفة (أ) و رمزها ($أ^{مد}$) و تكون على النظم (ن × م)

مُـــلاحظة : ① $(أ^{مد})^{مد} = أ$ ② المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان : $أ = أ^{مد}$

③ المصفوفة أ تكون شبه متماثلة إذا كان : $أ = - أ^{مد}$

[٧] **مصفوفة الوحدة :** هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى فهى تساوى واحد و يرمز لها بالرمز (I)

أمثـــلة :

① $I_{٢×٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ② $I_{٣×٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

أمثـــــــــــــلة

[١] إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد : $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$ ، $ج^{مد}$

الحـــــــــــــل

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$

تساوى مصفوفتين

تتساوى مصفوفتين إذا كانتا : ① لهما نفس النظم

② كل عنصر فى أ يساوى نظيره فى ب أى أن :- $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$

أمثـــــــــــــلة

[١] إذا كان : $\begin{pmatrix} ٠ & س & ٧ \\ ٤ & ٢ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٧ \\ ع & ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة : س ، ص ، ع

الحـــــــــــــل

س = ٢ ، ص = ٥ ، ع = ٤

[٢] إذا كان : $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ج + ء & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ج - ء & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & هـ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة : ج ، ء ، هـ

الحـــــــــــــل

ج − ء = ٥
ج + ء = ١
بالجمع ———————
٢ج = ٦

∴ ج = ٣
∴ ء = −٢
∴ هـ = ٧

٣ إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{ع} & \text{س}-١ \\ ٠ & ٣\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix}$ **أوجد قيمة :** س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــل

∴ س − ١ = ٣ ⇐ س = ٣ + ١ = ٤

∴ ٣ص = ١٥ ⇐ ص = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

∴ ع = ٢

٤ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٦ & \text{س} & ١- \\ \text{ع} & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & \text{ص} \end{pmatrix} = {}^{\text{مد}}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ١- \\ ٥ & ٦ & ٨ \\ ٩ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ **أوجد قيمة :** س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــل

$\begin{pmatrix} ٦ & \text{س} & ١- \\ \text{ع} & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & \text{ص} \end{pmatrix} = {}^{\text{مد}}\begin{pmatrix} ٦ & ٨ & ١- \\ ٢ & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ **أوجد قيمة :** س ، ص ، ع

س = ٨ ، ص = ٤ ، ع = ٢

٥ **أوجد قيمتى :** س ، ص ، ع **اذا كان :** أ = ب$^{\text{مد}}$ **حيث :**

أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٤- & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ -\text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــــل

∵ أ = ب$^{\text{مد}}$ ⇐ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤- & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ع} & \text{ص} - & \text{س} \end{pmatrix}$

س = ٢ ، −٤ = − ص ⇐ ص = ٤ ، ع = ٥

تدريـــــــب

أوجد قيمتى : س ، ص **اذا كان :** أ = ب$^{\text{مد}}$ **حيث :**

أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ب = $\begin{pmatrix} \text{ص} & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : $ٲ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ -١ & ٤ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : المصفوفة ٲ متماثلة

الحـــــــــــــــــل

$ٲ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ -١ & ٤ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ $\therefore$ ٲ = $ٲ^{مد}$

$\therefore$ المصفوفة ٲ متماثلة

٧ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} & ٤ \\ -\frac{١}{٢} & -٤ & -٢ \\ -٤ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : المصفوفة ب شبه متماثلة

الحـــــــــــــــــل

$ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & -\frac{١}{٢} & -٤ \\ \frac{١}{٢} & -٤ & ٢ \\ ٤ & -٢ & ٠ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} & ٤ \\ -\frac{١}{٢} & ٤ & -٢ \\ -٤ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore$ ب = − $ب^{مد}$

$\therefore$ المصفوفة ب شبه متماثلة

تدريـــــــــب

١ إذا كانت : $ٲ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢س & ٨ \\ -٤ & -٣ & ٦ \\ س + ٢ص & ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ متماثلة فأوجد قيمتى س ، ص

٢ إذا كانت : $ٲ = \begin{pmatrix} ٠ & ٣س & ٧ \\ ع + ٣ & ٠ & -٢ع \\ ٣ص - س & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فأوجد قيمة س ، ص ، ع

العمليات على المصفوفات

أولا : الجمع

إذا كانت : س ، ص مصفوفتان لهما نفس النظم فإن : عملية الجمع تكون ممكنة و يكون ناتج عملية الجمع عبارة عن مصفوفة من نفس النظم و كل عنصر فيها يساوى ناتج جمع العنصرين المتناظرين

أمثـــــــلة

[١] إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧ & -١ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$ **أوجد :** س + ص

الحــــــــــل

$$س + ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧ & -١ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٩ & -١ \\ ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

[٢] إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ **أوجد :** $أ + ب^{مد}$

الحــــــــــل

$$أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١٠ \\ -١ & ١٠ \end{pmatrix}$$

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة :-

إذا كانت : سہ على النظم (م × ن) فإن : ضرب أى عدد حقيقى (ك) حيث (ك ≠ ٠) فى المصفوفة سہ هو المصفوفة (ع = ك سہ) من النظم (م × ن) و ذلك ضرب العدد الحقيقى فى كل عنصر من عناصر المصفوفة سہ

[٣] إذا كانت : $سہ = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ك = ٣ **فأوجد :** ع = ٣سہ

الحــــــــــل

$$ع = ٣سہ = ٣ \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢١ \\ ٦ & ١٢ \end{pmatrix}$$

خواص عملية جمع المصفوفات

نفرض أن : س ، ص ، ع ثلاثة مصفوفات من النظم (م × ن) فإن :-

① **خاصية الإنغلاق :** س + ص تكون مصفوفة من نفس النظم (م × ن)

② **خاصية الإبدال :** س + ص = ص + س

③ **خاصية الدمج :** (س + ص) + ع = س + (ص + ع) = س + ص + ع

④ **خاصية المحايد الجمعى :** س + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + س = س حيث : $\boxed{}$ مصفوفة صفرية من نفس نظم س

⑤ **خاصية المعكوس " النظير " الجمعى :** لأى مصفوفة س توجد مصفوفة (− س) من نفس النظم

بحيث : س + (− س) = $\boxed{}$

ثانيا : الطرح :-

إذا كانت المصفوفتين س ، ص على نفس النظم (م × ن) فإن :

س − ص = س + (− ص) **على نفس النظم (م × ن)**

$\boxed{٤}$ **إذا كانت :** س = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ **أوجد :** س − ص

الحـــــــــــل

س − ص = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٥ & -٣ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

$\boxed{٥}$ **إذا كانت :** س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$ **أوجد :** ٣س − ٢ص

الحـــــــــــل

٣س − ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٢ & -٨ \\ ٢ & -٢ & -١٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٤ & ٨ & -٥ \\ ١١ & -٢ & -٨ \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : $٢ب + س^{مد} = ٣أ$

الحـــــــــــــل

$\because$ $٢ب + س^{مد} = ٣أ$ $\Leftarrow$ $س^{مد} = ٣أ - ٢ب$

$$س^{مد} = ٣ \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ & ١٥ \\ -٦ & ٩ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & ٠ & ٦ \\ -١٠ & ٢ & -٨ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢١ \\ -١٦ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$س = (س^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} ٤ & -١٦ \\ ٣ & ١١ \\ ٢١ & ٤ \end{pmatrix}$$

٧ إذا كانت : $٢أ^{مد} + \begin{pmatrix} ٦ & ٢ & ٠ \\ ٨ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix} = \square$ **فأوجد : أ**

الحـــــــــــــل

$$٢أ^{مد} = \square - \begin{pmatrix} ٦ & ٢ & ٠ \\ ٨ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٦ & -٢ & ٠ \\ -٨ & ١٠ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$أ^{مد} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٦ & -٢ & ٠ \\ -٨ & ١٠ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٠ \\ -٤ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$$

$أ = (أ^{مد})^{مد} = \begin{pmatrix} -٣ & -٤ \\ -١ & ٥ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

$\boxed{٨}$ **إذا كانت :** $أ = \begin{pmatrix} ٨ & ١ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -٥ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

أثبت أن : $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

الحـــــــــــل

$أ + ب = \begin{pmatrix} ٨ & ١ \\ ٢ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -٥ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ -٣ & -٤ \\ ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

$(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & -٣ & ٨ \\ ٨ & -٤ & ٩ \end{pmatrix}$

$أ^{مد} + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & -٥ & ٤ \\ ٧ & -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & -٣ & ٨ \\ ٨ & -٤ & ٩ \end{pmatrix}$

$\therefore \; (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

تدريـــــــب

أكمـــــــل مايلى :–

(١) $(س ص)^{مد} =$ .... × ....　　(٢) $(س + ص)^{مد} =$ .... + ...

(٣) $(س^{مد})^{مد} =$ ....　　(٤) $(س - ص)^{مد} =$ .... – ....

(٥) **لأى مصفوفة أ يكون :** $أ + (-أ) =$ ....

ضرب المصفوفات

إذا كانت س ، ص مصفوفتان فإن : س ، ص تكونان قابلتان للضرب إذا كان عدد أعمدة المصفوفة س يساوى عدد صفوف المصفوفة ص

أى أن :- إذا كانت س مصفوفة على النظم (م × ن) ، ص مصفوفة على النظم (ن × ل)

فإن :- حاصل الضرب (س × ص = ع) تكون مصفوفة على النظم (م × ل)

مــــلاحظة هامة :- عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة فى حالة واحدة فقط إذا و فقط إذا كان : عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية

أمثـــــــلة

١ إذا كان :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

فأوجد : أب ، ب أ

الحــــــــل

المصفوفة أ على النظم (٢ × ٣) ، المصفوفة ب على النظم (٣ × ٢)

فتكون المصفوفة الناتجة على النظم (٢ × ٢)

$$\text{أب} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times ٢ + ١ \times ٣ & ٢ \times ١ + ٣ \times ٤ + ١ \times ١ \\ ١ \times ٢ + ١ \times ٢ + ٢ \times ٣ & ١ \times ١ + ١ \times ٤ + ٢ \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب أ} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ١ \times ١ & ٢ \times ٣ + ١ \times ١ & ٢ \times ١ + ١ \times ٢ \\ ٢ \times ٢ + ٤ \times ١ & ٢ \times ٣ + ٤ \times ١ & ٢ \times ١ + ٤ \times ٢ \\ ٣ \times ٢ + ١ \times ١ & ٣ \times ٣ + ١ \times ١ & ٣ \times ١ + ١ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ٤ \\ ٨ & ١٠ & ١٠ \\ ٧ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$$

٢ إذا كان :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة : أ^{٢} – ٣ب

الحــــــــل

المصفوفة أ على النظم (٢ × ٢) ، المصفوفة ب على النظم (٢ × ٢)

فتكون المصفوفة الناتجة على النظم (٢ × ٢)

$$\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times ٣ + ١ \times ٢ & ٣ \times ١ + ١ \times ٥ \\ ٢ \times ٣ + ٥ \times ٢ & ٢ \times ١ + ٥ \times ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٢} - ٣\text{ب} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} - ٣ \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٠ \\ -١٥ & -٢٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

٣ إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : $\text{أ}^{٤}$

الحـــــــــــــــــل

$$\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ١ \times ٠ & ٢ \times ١ + ١ \times ٥ \\ ٠ \times ٢ + ٥ \times ٠ & ٠ \times ١ + ٥ \times ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٤} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & ٢٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \times ٤ + ٢٧ \times ٠ & ٤ \times ٢٧ + ٢٧ \times ٢٥ \\ ٠ \times ٤ + ٢٥ \times ٠ & ٠ \times ٢٧ + ٢٥ \times ٢٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٦ & ٧٨٣ \\ ٠ & ٦٢٥ \end{pmatrix}$$

لاحظ أن :-

$\text{أ}^{٤} = \text{أ}^{٢} \times \text{أ}^{٢}$

خواص عملية الضرب

نفرض أن : س ، ص ، ع ثلاثة مصفوفات من النظم (م × ن) فإن :-

① **خاصية الدمج :** (س ص) ع = س (ص ع)

② **خاصية المحايد الضربى :-** س × I = I × س = س

③ **خاصية توزيع ضرب المصفوفات على الجمع**

س (ص + ع) = س ص + س ع ، (س + ص) ع = س ع + ص ع

٤ إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $\text{أ}^{٢} - ٥\text{أ} + ٢I = \square$

الحـــــــــــــــــل

$$\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ - ١ \times -٤ & ٢ \times -١ - ١ \times ٣ \\ -٤ \times ٢ + ٣ \times -٤ & -٤ \times -١ + ٣ \times ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix}$$

المقدار $= م^{٢} - ٥م + ٢I = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - ٥\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٨ - ١٠ + ٢ & -٥ + ٥ + ٠ \\ -٢٠ + ٢٠ + ٠ & ١٣ - ١٥ + ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

٥ أوجد المصفوفة التى تحقق أن : $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــل

حيث أن المصفوفة الأولى من النظم (٣ × ٢) و المصفوفة الناتجة من النظم (٣ × ١) فيجب أن تكون المصفوفة ص من النظم (٢ × ١)

نفرض أن : $ص = \begin{pmatrix} م \\ ب \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} م \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \times م - ١ \times ب \\ ٢ \times م + ٠ \times ب \\ ٣ \times م + ٥ \times ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} م - ب \\ ٢م \\ ٣م + ٥ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$$

$\therefore ٢م = ٤ \quad \Leftarrow \quad م = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\therefore م - ب = -١ \quad \Leftarrow \quad ٢ - ب = -١ \quad \Leftarrow \quad ب = ٢ + ١ = ٣$

تدريـــــــب

① **إذا كانت :** $م = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ **فأوجد كلا من :**

م ب ، ب م ، $(م + ب)^{مد}$

② **إذا كانت :** $م^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $م^{٢} - ٥م + ٢٢I = \square$

المحددات

١ أوجد قيمة المحددات التالية

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحــــــــــــل

(أ) $\Delta = ٢ \times ١ - ٣ \times ٥ = ٢ - ١٥ = -١٣$

(ب) $\Delta = ١ \times ٤ - ٢ \times -٣ = ٤ + ٦ = ١٠$

==================================

٢ أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحــــــــــــل

يمكن فك المحدد عن طريق أى صف (عمود) مع مراعاة قاعدة الإشارات ..... بأستخدام عناصر الصف الأول

$\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

$= (٧ \times ٤ - ٢ \times ٣) -٢(٤ \times ٤ - ٢ \times ٥) + ٣ (٤ \times ٣ - ٧ \times ٥)$

$= (٢٨ - ٦) - ٢(١٦ - ١٠) + ٣ (١٢ - ٣٥) = ٢٢ - ١٢ - ٦٩ = - ٥٩$

٣ حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & صفر & صفر \\ ١ & س & س \\ ٥ & ٢ & س \end{vmatrix} = ٣س$

الحــــــــــــل

إيجاد قيمة المحدد بإستخدام عناصر الصف الاول

$\Delta = س (س \times س - س \times ٢) - صفر (١ \times س - س \times ٥) + صفر (١ \times ٢ - س \times ٥)$

$= س (س^٢ - ٢س)$

$\therefore س (س^٢ - ٢س) = ٣س \quad \Leftarrow \quad س^٢ - ٢س = ٣$

$\therefore س^٢ - ٢س - ٣ = صفر \quad \Leftarrow \quad (س - ٣) (س + ١) = صفر$

$\therefore س = ٣$ أ، $س = -١$

محدد المصفوفة المثلثية

إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & ٠ & ٠ \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢٣} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & ٠ \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$

فإن : $\Delta = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$ أو $\Delta = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢}$ **(قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسى)**

٤ بدون فك المحدد أوجد قيمة : (أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٠ & -٣ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــل

(أ) $\triangle = ٣ \times ٢ \times ٥ = ٣٠$

(ب) $\triangle = ٣ \times -٣ \times ٢ = -١٨$

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

١ حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : ٦س − ٥ص = −٢٣ ، ٣س + ٣ص = ١٦

الحـــــــــــــل

$\triangle = \begin{vmatrix} ٦ & -٥ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ٣ - (-٥) \times ٣ = ١٨ + ١٥ = ٣٣$

$\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٢٣ & -٥ \\ ١٦ & ٣ \end{vmatrix} = -٢٣ \times ٣ - (-٥) \times ١٦ = -٦٩ + ٨٠ = ١١$

$\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٦ & -٢٣ \\ ٣ & ١٦ \end{vmatrix} = ٦ \times ١٦ - (-٢٣) \times ٣ = ٩٦ + ٦٩ = ١٦٥$

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{١١}{٣٣} = \frac{١}{٣}$ ، $\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{١٦٥}{٣٣} = ٥$

٢ حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

الحـــــــــــــل

$\triangle = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢(٢\times٣ - ٢\times٤) - (٣\times٣ - ٢\times٥) - ٢(٣\times٤ - ٢\times٥) = -٤ + ١ - ٤ = -٧$

$\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠(٢\times٣ - ٢\times٤) - (١\times٣ - ٢\times٤) - ٢(١\times٤ - ٢\times٤) = -٢٠ + ٥ + ٨ = -٧$

$\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢(١\times٣ - ٢\times٤) - ١٠(٣\times٣ - ٢\times٥) - ٢(٣\times٤ - ١\times٥) = -١٠ + ١٠ - ١٤ = -١٤$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢(٢\times٤ - ١\times٤) - (٣\times٤ - ١\times٥) + ١٠(٣\times٤ - ٢\times٥) = ٨ - ٧ + ٢٠ = ٢١$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٧}{-٧} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢ \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٢١}{٧} = ٣$$

تدريـــــــــب

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

(١) س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢س − ٢ص − ٤ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤

(٢) ٤س + ٣ص = −٤ ، ٣س − ص = −٣

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

١ باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقاط أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، −٤) ، ج(−٢ ، ٣)

الحـــــــــل

$$م = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}\Big[(٣\times٣ + ٤\times-٢) - (١\times٣ - ٢\times-٢) + (١\times-٤ - ٢\times٣)\Big]$$

$$= \frac{١}{٢}\Big[١ - ٧ - ١٠\Big] = -٨$$

∴ مساحة Δ أ ب ج = | م | = | −٨ | = ٨ وحدة مساحة

إثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة باستخدام المحددات

٢ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط أ(−٢ ، ٤) ، ب(٣ ، ٠) ، ج(٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة

الحـــــــــل

$$\because \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٨ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = (٣\times-٤ - ٠\times٨) - (-٢\times-٤ - ٤\times٨) + (-٢\times٠ - ٤\times٣)$$

$$= -١٢ + ٢٤ - ١٢ = \text{صفر}$$

∴ النقاط أ(−٢ ، ٤) ، ب(٣ ، ٠) ، ج(٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة

تدريـــــــب

١ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط أ(٣ ، ٥) ، ب(٤ ، −١) ، ج(٥ ، −٧) تقع على استقامة واحدة

٢ باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقاط أ(٢ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٤) ، ج(٠ ، −٢)

المعكوس الضربى للمصفوفة (٢ × ٢)

إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة $س$ التى يرمز لها بالرمز $س^{-١}$ يكون موجودا عندما تكون قيمة محدد المصفوفة ($\Delta \neq ٠$) لا تساوى صفر

و يكون : $س^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

أمثـــــــــلة

$\boxed{١}$ بين المصفوفات التى لها معكوس ضربى و أوجده (إن وجد)

① $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

الحــــــــل

① $\Delta = ٢ \times ١ - ١ \times -١ = ٢ + ١ = ٣ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربى

المعكوس الضربى للمصفوفة $= \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}$

② $\Delta = ٢ \times ٣ - ٦ \times -١ = ٦ + ٦ = ١٢ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربى

المعكوس الضربى للمصفوفة $= \frac{١}{١٢} \begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$

③ $\Delta = -١ \times ٤ - ٠ \times ٣ = -٤ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربى

المعكوس الضربى للمصفوفة $= -\frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

④ $\Delta = ٤ \times ١ - ٢ \times ٣ = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربى

المعكوس الضربى للمصفوفة $= -\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & ١ \\ \frac{٣}{٢} & -٢ \end{pmatrix}$

٢ ما قيم أ الحقيقية التى تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوس ضربى :

① $\begin{pmatrix} أ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} أ-١ & -٢ \\ ١ & أ-٢ \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

① $\Delta = أ \times ٣ - ١ \times ٦ = ٣أ - ٦$ **بوضع** $\Delta = ٠$ $\therefore ٣أ - ٦ = ٠ \Leftarrow أ = \frac{٦}{٣} = ٢$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربى $\therefore أ \in ح - \{٢\}$

② $\Delta = أ \times أ - ٩ \times ٤ = أ^{٢} - ٣٦$ **بوضع** $\Delta = ٠$ $\therefore أ^{٢} - ٣٦ = ٠ \Leftarrow أ = \sqrt{٣٦} = \pm ٦$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربى $\therefore أ \in ح - \{\pm ٦\}$

③ $\Delta = (أ-١) \times (أ-٢) + ٢ \times ١ = أ^{٢} - ٣أ + ٢ + ٢ = أ^{٢} - ٣أ + ٤$

بوضع $\Delta = ٠$ $\therefore أ^{٢} - ٣أ + ٤ = ٠$ م . ح $= \emptyset$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربى $\therefore أ \in ح$

٣ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $س^{-١} = س$

الحـــــــــل

$\Delta = ١ \times -١ - أ \times ٠ = -١ \neq ٠$ **المصفوفة لها معكوس ضربى**

$س^{-١} = - \begin{pmatrix} -١ & -أ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ $\therefore س^{-١} = س$

٤ إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $س^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = ٢ \times ٢ - ٠ \times ٠ = ٤ \neq ٠$ **المصفوفة لها معكوس ضربى**

$س^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

٥ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = س \times ص - (-س ص \times ٠) = س ص \neq ٠$ **المصفوفة لها معكوس ضربى**

$س^{-١} = \frac{١}{س ص} \begin{pmatrix} ص & س ص \\ ٠ & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

٦ **إذا كانت :** س = $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ **فأثبت أن :** $(\text{س ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}\ \text{س}^{-1}$

الحـــــــل

س ص = $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times1 - 3\times -1 & 2\times -1 - 3\times 3\\ 0\times1 + 1\times -1 & 0\times -1 + 1\times 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -11\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$|\text{س ص}| = 5\times3 - (-11\times -1) = 15 - 11 = 4$

$(\text{س ص})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 11\\ 1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{11}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$|\text{س}| = 2\times1 - (-3\times 0) = 2$ $\qquad$ $|\text{ص}| = 1\times3 - (-1\times -1) = 3 - 1 = 2$

$\text{س}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\text{ص}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\text{ص}^{-1}\ \text{س}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 & \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 1\\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{11}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$\therefore (\text{س ص})^{-1} = \text{ص}^{-1}$

٧ **إذا كانت :** ب = $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ، أ ب = I **فأوجد المصفوفة أ**

الحـــــــل

$\because$ أ ب = I $\qquad$ $\therefore$ أ = $I \times \text{ب}^{-1} = \text{ب}^{-1}$ $\qquad$ $\therefore |\text{ب}| = 2\times1 - 4\times3 = 2 - 12 = -10$

$\therefore \text{ب}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{4}{10}\\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix} = \text{أ}$

تدريـــــب

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ ، أ ب = $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ **فأوجد المصفوفة ب**

حل معادلتين آنيتين بإستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

خطوات الحل

① نضع معاملات المعادلتين فى صورة مصفوفة (مصفوفة المعاملات) و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{ب}_٢ & \text{أ}_٢ \end{pmatrix}$

② نضع مصفوفة المجاهيل و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$

③ نضع مصفوفة الثوابت و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} \text{ج}_١ \\ \text{ج}_٢ \end{pmatrix}$

④ تكتب على الصورة التالية : $\begin{pmatrix} \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{ب}_٢ & \text{أ}_٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ج}_١ \\ \text{ج}_٢ \end{pmatrix}$ ثم تحل بخطوات المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات

أمثـــــــــلة

حل كل من نظام المعاملات الخطية التالية باستخدام المصفوفات

① ٣س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣ ② ٢س − ٧ص = ٣ ، س − ٣ص = ٢

الحـــــــــــل

① $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

| أ | = ٣ × ٢ − ٢ × ٢ = ٣ − ٤ = −١

$\therefore \text{أ}^{-١} = -\begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٣ & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١\times٥ + ٢ \times ٣ \\ ٢\times٥ - ٣ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ١ ⇐ م . ح = {(١ ، ١)}

② $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٧- & ٢ \\ ٣- & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

| أ | = ٢ × −٣ + ٧ × ١ = −٦ + ٧ = ١

$\therefore \text{أ}^{-١} = -\begin{pmatrix} ٧ & ٣- \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ، $\because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣- \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣\times٣ + ٧ \times ٢ \\ -١\times٣ + ٢ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ٥ ، ص = ١ ⇐ م . ح = {(٥ ، ١)}

③ باستخدام المصفوفات أوجد عددين مجموعهما ١٠ و الفرق بينهما ٤

الحـــــــــــل

نفرض العددين : س ، ص ∴ س + ص = ١٠ ، س − ص = ٤

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١- \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

| أ | = ١ × −١ − ١ × ١ = −١ − ١ = −٢

$$\therefore \text{أ}^{-١} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ١- & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix} \quad ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \times ١٠ + \frac{١}{٢} \times ٤ \\ \frac{١}{٢} \times ١٠ - \frac{١}{٢} \times ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٥ ، ص = ١

∴ **العددان هما** ٧ ، ٣

④ يمر المنحنى : ص = أس^{٢} + ب س **بالنقطتين :** (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٨) **استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين** أ ، ب

الحـــــــــــل

بالتعويض بالنقطة (٣ ، ٠) ⇐ ٩أ + ٣ب = ٠

بالتعويض بالنقطة (٤ ، ٨) ⇐ ١٦أ + ٤ب = ٨

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٦ & ٤ \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$$

| أ | = ٩ × ٤ − ٣ × ١٦ = ٣٦ − ٤٨ = −١٢

$$\therefore \text{أ}^{-١} = -\frac{١}{١٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٣- \\ ١٦- & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٣} & -\frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & -\frac{٣}{٤} \end{pmatrix} \quad ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & -\frac{٣}{٤} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٣} \times ٠ + \frac{١}{٤} \times ٨ \\ \frac{٤}{٣} \times ٠ - \frac{٣}{٤} \times ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٦- \end{pmatrix}$$

∴ أ = ٢ ، ب = −٦

⑤ الخط المستقيم الذى معادلته : ص + أس = جـ يمر بالنقطتين (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) إستخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين أ ، جـ

الحـــــــــــــــل

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٥) ⇐ ٥ + أ = جـ ⇐ أ − جـ = −٥

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ١) ⇐ ١ + ٢أ = جـ ⇐ ٢أ − جـ = −١

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \quad , \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{جـ} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{جـ} = \begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ١ \times -١ - -١ \times ٢ = -١ + ٢ = ١$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \quad , \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{جـ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٥ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \times -٥ + ١ \times -١ \\ -٢ \times -٥ + ١ \times -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٩ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ أ = ٤ ، جـ = ٩

⑥ إشترت أمل ٨كجم من الدقيق ، ٢كجم من الزبد بمبلغ ١٤٠ جنيها ، و اشترت صديقتها ريم ٤كجم من الدقيق ، ٣كجم من الزبد بمبلغ ١٧٠ جنيها ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر الكيلوجرام من كلا النوعين

الحـــــــــــــــل

نفرض سعر كيلوجرام الدقيق = س ، سعر كيلوجرام الزبد = ص

٨س + ٢ص = ١٤٠ ، ٤س + ٣ص = ١٧٠

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \quad , \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{جـ} = \begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١٧٠ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ٨ \times ٣ - ٤ \times ٢ = ٢٤ - ٨ = ١٦$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix} \quad , \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{جـ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & -\frac{١}{٨} \\ -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} \times ١٤٠ - \frac{١}{٨} \times ١٧٠ \\ -\frac{١}{٤} \times ١٤٠ + \frac{١}{٢} \times ١٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٥ ، ص = ٥٠

سعر كيلوجرام الدقيق = ٥ ، سعر كيلوجرام الزبد = ٥٠

البرمجة الخطية

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد

خواص التباين :-

إذا كان : س ، ص ، ع **أعداد حقيقية و كان :** س < ص **فإن :-**

① س + ع < ص + ع **سواء كانت** ع **موجبة أو سالبة** **(خاصية الإضافة)**

فمثلا : س < ٣ ⇐ س + ٤ < ٧

② **إذا كانت :** ع > ٠ **فإن :** س ع < ص ع **(الضرب فى عدد حقيقى موجب)**

فمثلا : س < ٥ ⇐ ٣س < ١٥

③ **إذا كانت :** ع < ٠ **فإن :** س ع > ص ع **(الضرب فى عدد حقيقى سالب)**

فمثلا : س < ٥ ⇐ −٣س > −١٥

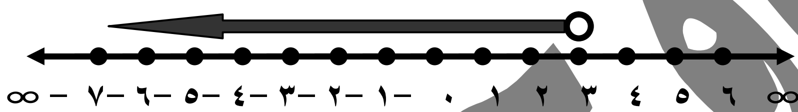
أمثـــــــــلة

١ **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد :** ٣س − ٤ < ٥

الحــــــــــــل

٣س − ٤ + ٤ < ٥ + ٤ ⇐ ٣س < ٩ ⇐ س < ٣

م . ح =] −∞ ، ٣ [



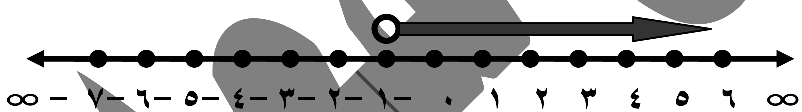
==========================

٢ **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد :** ٤ − ٢س ≥ ٦

الحــــــــــــل

٤ − ٢س − ٤ ≥ ٦ − ٤ ⇐ −٢س ≥ ٢ ⇐ س ≤ −١

م . ح = [−١ ، ∞ [



==========================

٢ **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد :** س + ٨ > ٣س − ٢ ≥ س + ٤

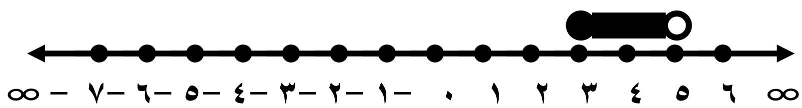
الحــــــــــــل

س − س + ٨ > ٣س − س − ٢ ≥ س − س + ٤ ⇐ ٨ > ٢س − ٢ ≥ ٣

∴ ٨ + ٢ > ٢س − ٢ + ٢ ≥ ٤ + ٢ ⇐ ١٠ > ٢س ≥ ٦

∴ $\frac{١٠}{٢}$ > $\frac{٢س}{٢}$ ≥ $\frac{٦}{٢}$ ⇐ ٥ > س ≥ ٣

م . ح = [٣ ، ٥ [



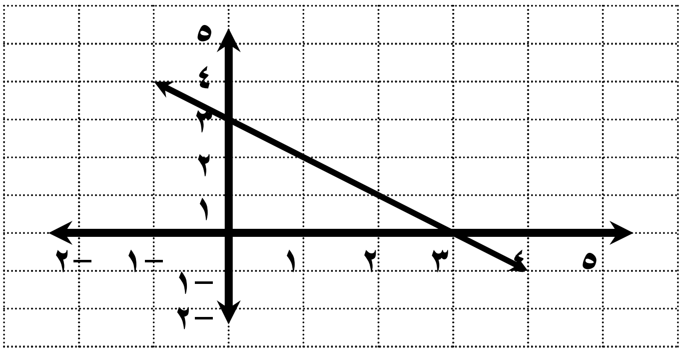
حل متباينة من الدرجة الأولى فى متغيرين

مقدمة : المعادلة ٢س + ب ص = جـ هى معادلة خطية " من الدرجة الأولى " يمثلها بيانيا خط مستقيم و مجموعة الحل لها عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحقققها

مثـــال : أوجدمجموعة حل المعادلة : س + ص = ٣ بيانيا

الحـــــــــل

س	٠	٣	٥
ص	٣	٠	٢−



مـــــلاحظات هامة :

المستقيم (ل) يقسم المستوى الى ثلاث مجموعات من النقط

① مجموعة نقط المستقيم ل و هى مجموعة النقاط التى تحقق معادلته و يسمى المستقيم الحدى

② ف، و هى مجموعة نقط المستوى و التى تقع على أحد جانبى المستقيم ل و هى نصف المستوى

③ فم و هى مجموعة نقط المستوى و التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ل و هى النصف الآخر

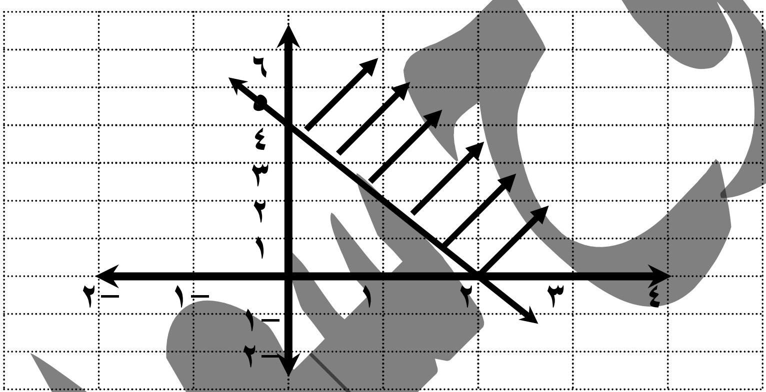
أمثـــــلة

١ حل المتباينة : ٢س + ص ⩽ ٤

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ٢س + ص = ٤

س	٠	٢
ص	٤	٠



نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ لا تحقق المتباينة

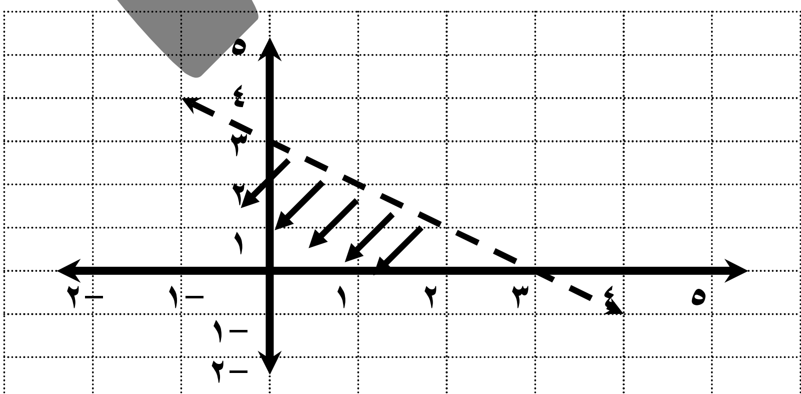
∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

٢ حل المتباينة : س + ص < ٣

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : س + ص = ٣

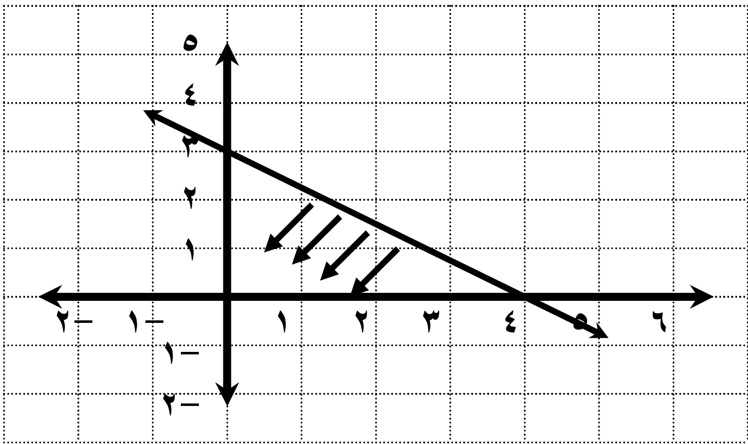
س	٠	٣
ص	٣	٠



نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)



٣ حل المعادلة : $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} \geqslant ١$

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ٣س + ٤ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٣	٠

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ١٢ تحقق المتباينة

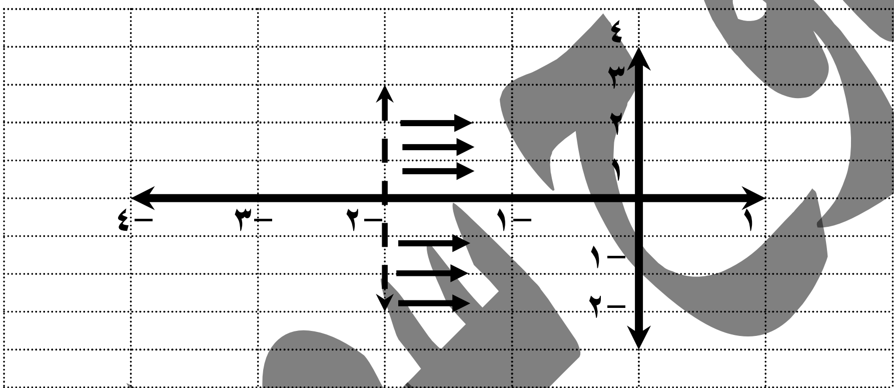
∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

مـــــــــلاحظات هامة

① **إذا كانت النقطة المختارة للتعويض فى المتباينة تحققها فإن مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه هذه النقطة**

② **إذا كانت علامة التباين (> أ، <) يكون الخط المستقيم متقطع**

③ **إذا كانت علامة التباين (⩾ أ، ⩽) يكون الخط المستقيم متصل**



٤ حل المتباينة : س > −٢

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : س = −٢

يوازى محور الصادات

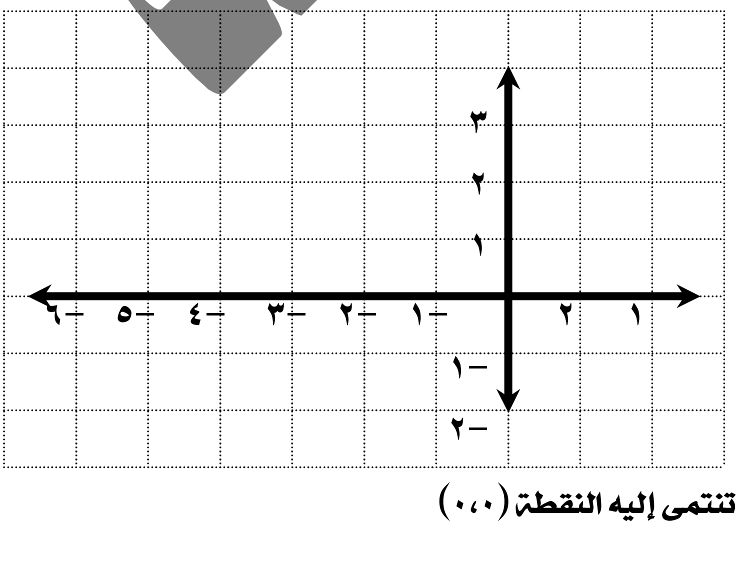
و يمر بالنقطة (−٢ ، ٠)

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ > −٢ تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

تدريـــــــب



حل المتباينة : س ⩽ ٢ص − ٤

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ....

س	٠	....
ص	....	٠

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ > −٢ تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

الحل البيانى لمتباينيتن أو أكثر من الدرجة الأولى فى متغيرين

الحل البيانى للمتباينتين : أ$_١$س + ب$_١$ص = ج$_١$ ، أ$_٢$س + ب$_٢$ص = ج$_٢$

حيث : أ$_١$ ، ب$_١$ ، ج$_١$ ، أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، ج$_٢$ $\in$ ح

هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق كلا من المتباينتين معا :

أى إذا كان : ع$_١$ = **مجموعة حل المتباينة الأولى** ، ع$_٢$ = **مجموعة حل المتباينة الثانية**

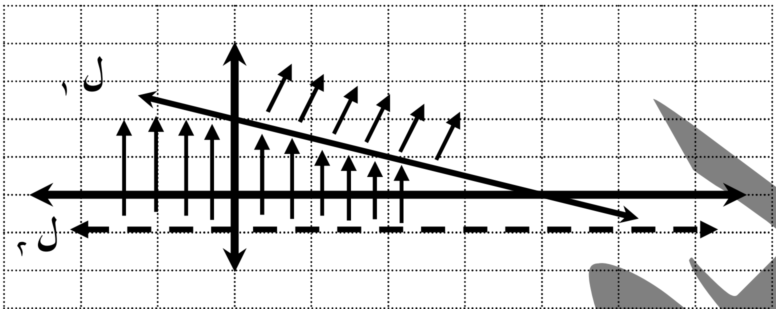
فإن : مجموعة حل المتباينتين معا = ع$_١$ $\cap$ ع$_٢$

أمثـــــــلة

$\boxed{١}$ **حل المتباينتين :** س + ٢ص $\geqslant$ ٤ ، ص > −١

الحــــــل

نرسم المستقيم الحدى : س + ٢ص = ٤



س	٠	٤
ص	٢	٠

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ **لا تحقق المتباينة**

∴ **مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)**

نرسم المستقيم الحدى : ص = −١ **يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، −١)**

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة نجد أن : ٠ > −١ **تحقق المتباينة**

∴ **مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)**

و تكون مجموعة حل المتباينتين معا هى المنطقة أعلى المستقيم ل$_١$

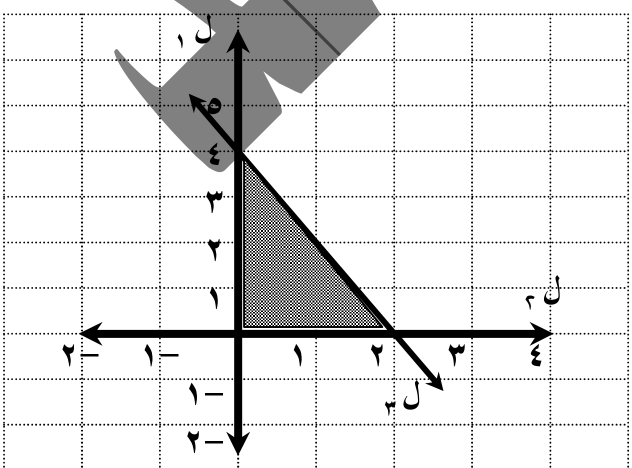
$\boxed{٢}$ **أوجد محموعة حل المتباينات التالية معا :** س $\geqslant$ ٠ ، ص $\geqslant$ ٠ ، ٢س + ص $\leqslant$ ٤

الحــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ل$_١$: س = ٠ **و هو محور الصادات**

نرسم المستقيم الحدى : ل$_٢$: ص = ٠ **و هو محور السينات**

نرسم المستقيم الحدى : ل$_٣$: ٢س + ص = ٤

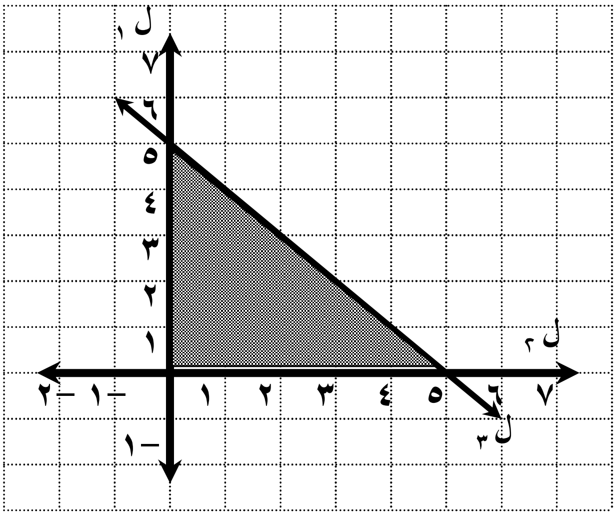


س	٠	٢
ص	٤	٠

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم و هى المثلث القائم و الذى رؤوسه النقاط (٢ ، ٠)،(٠ ، ٠)،(٠ ، ٤)

٣ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية معا : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٥

الحـــــــــل



نرسم المستقيم الحدى : ل ١ : س = ٠ و هو محور الصادات

نرسم المستقيم الحدى : ل ٢ : ص = ٠ و هو محور السينات

نرسم المستقيم الحدى : ل ٣ : س + ص = ٥

س	٠	٥
ص	٥	٠

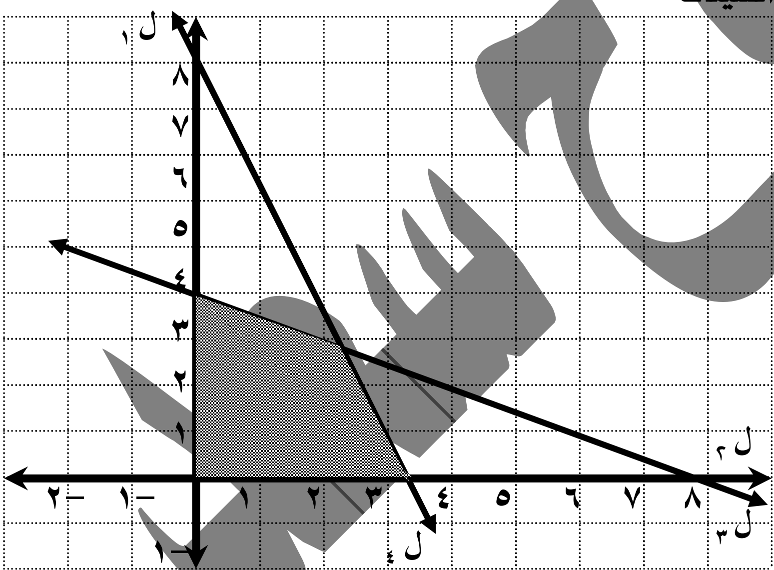
بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم و هى المثلث القائم و الذى رؤوسه النقاط (٥ ، ٠)،(٠ ، ٠)،(٠ ، ٥)

٤ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية معا : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ص ≤ ٨ − س ، ٢س + ص ≤ ٧

الحـــــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ل ١ : س = ٠ و هو محور الصادات

نرسم المستقيم الحدى : ل ٢ : ص = ٠ و هو محور السينات



نرسم المستقيم الحدى : ل ٣ : ٢ص = ٨ − س

س	٠	٨
ص	٤	٠

نرسم المستقيم الحدى : ل٤ : ٢س + ص = ٧

س	٠	٧/٢
ص	٧	٠

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط (٧/٢ ، ٠)،(٠ ، ٠)،(٠ ، ٤)،(٢,٢ ، ٢,٨)

تدريـــــــب

① أوجد مجموعة حل المتباينات التالية بيانيا :-

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٢س + ص ≤ ٦

② أوجد مجموعة حل المتباينات التالية بيانيا :-

س + ٢ص ≤ ٢ ، ٢س + ص ≥ ٤

البرمجة الخطية

تعتمد البرمجة الخطية على حل المتباينات و هى وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار فى حل مشكلة ما أو هى الوسية الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه على صورة دالة خطية (ر = ل س + م ص) تسمى دالة الهدف و ذلك فى ضوء القيود و الإمكانيات المتاحة و التى توضع على صورة متباينات خطية تحدد بما يسمى نظام العمل و ذلك لإيجاد مجموعه من قيم حل هذه المتباينات بحيث تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف

و لإيجاد الهدف المطلوب (أكبر قيمة أو أصغر قيمة) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها مضلع ما ..... و بالتعويض بهذه الرؤوس فى دالة الهدف نحصل على النقطة التى تحقق الهدف المطلوب

أمثـــــلة

$\boxed{1}$ **عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :**

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٣س + ص ≤ ٦

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ل أكبر ما يمكن حيث : ل = ٥س + ٣ص

الحـــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ل $_١$: س = ٠ و هو محور الصادات

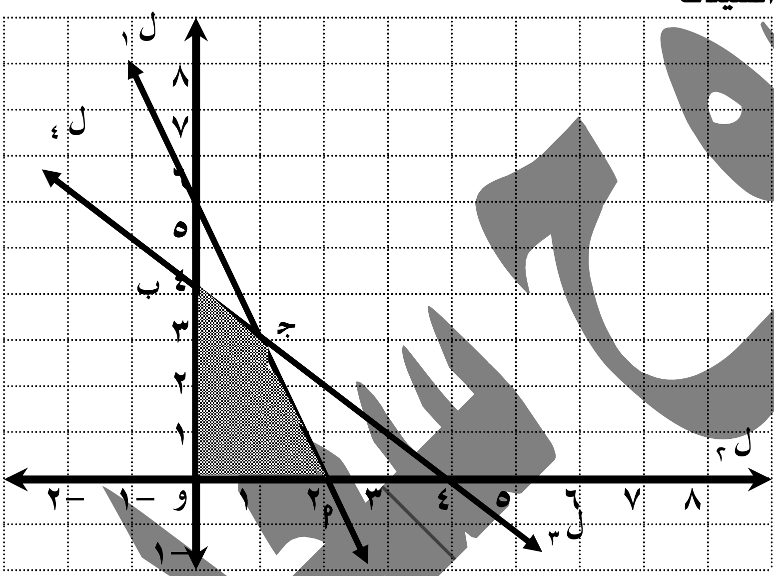
نرسم المستقيم الحدى : ل $_٢$: ص = ٠ و هو محور السينات

نرسم المستقيم الحدى : ل $_٣$: س + ص = ٤

س	٠	٤
ص	٤	٠

نرسم المستقيم الحدى : ل $_٤$: ٣س + ص = ٦

س	٠	٢
ص	٦	٠



بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط م (٠ ، ٤) ، و(٠ ، ٠) ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (١ ، ٣)

بالتعويض بالنقاط م ، و ، ب ، جـ فى دالة الهدف

ل $_م$ = ٠ × ٥ + ٣ × ٤ = ١٢ ل $_و$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

ل $_ب$ = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ = ١٠ ل $_جـ$ = ٥ × ١ + ٣ × ٣ = ١٤

∴ ل **أكبر ما يمكن عند النقطة (١ ، ٣)**

٢ عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :

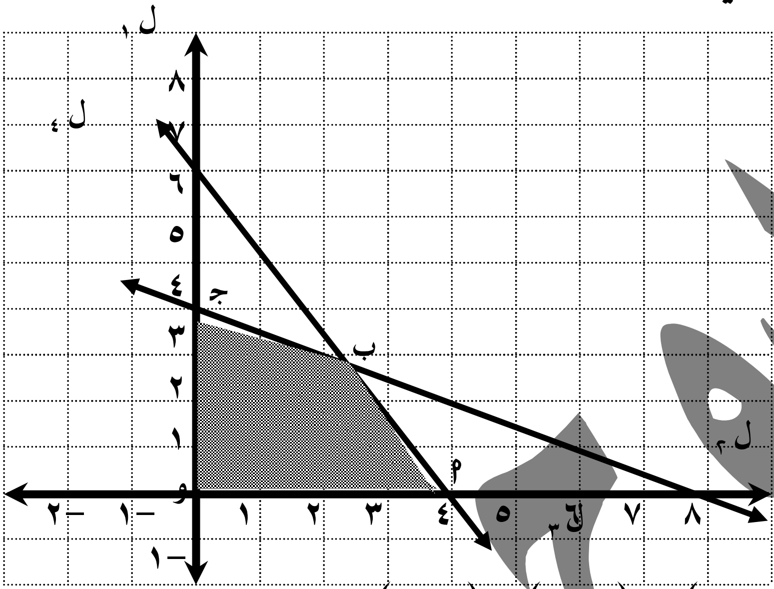
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ص ⩽ ٨ ، ٣س + ٢ص ⩽ ١٢

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ل أكبر ما يمكن حيث : ل = ٥٠س + ٧٥ص

الحـــــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ل ١ : س = ٠ و هو محور الصادات

نرسم المستقيم الحدى : ل ٢ : ص = ٠ و هو محور السينات



نرسم المستقيم الحدى : ل ٣ : س + ٢ص = ٨

س	٠	٨
ص	٤	٠

نرسم المستقيم الحدى : ل ٤ : ٣س + ٢ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٦	٠

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط أ (٤ ، ٠)، و(٠ ، ٠)، ب (٠ ، ٤)، ج (٢ ، ٣)

بالتعويض بالنقاط أ ، و ، ب ، ج فى دالة الهدف

ر أ = ٤ × ٥٠ + ٠ × ٧٥ = ٢٠٠ ر و = ٠ × ٥٠ + ٠ × ٧٥ = صفر

ر ب = ٠ × ٥٠ + ٤ × ٧٥ = ٣٠٠ ر ج = ٢ × ٥٠ + ٣ × ٧٥ = ٣٢٥

∴ ر أكبر ما يمكن عند النقطة (٢ ، ٣)

تدريـــــــب

عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ص – س ⩽ ٣ ، ٢ص + ٥س ⩽ ٢٠

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ر أكبر ما يمكن حيث : ر = ٥س + ٣ص

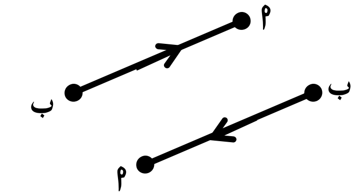
هندســـــــة

١ الكميات القياسية و الكميات المتجهة و القطعة المستقيمة الموجهة

الكمية القياسية : هى كمية تتعين تماما بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية

و من أمثلتها : الطول - الكتلة – الزمن – درجة الحرارة – الحجم – المسافة

الكمية الموجهة : هى كمية تتعين تماما بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة الى الإتجاه و من أمثلتها : القوة – الإزاحة – السرعة



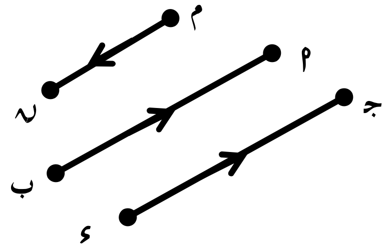
القطعة المستقيمة الموجهة ($\overleftarrow{\text{أب}}$) : هى قطعة مستقيمة بدايتها النقطة أ و نهايتها النقطة ب و هى تتحدد بثلاثة عناصر هى :

(١) نقطة البداية (٢) نقطة النهاية (٣) الإتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

مُـــــلاحظة : أب = ب أ بينما $\overleftarrow{\text{أب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ لإختلافهما فى نقطتى البداية و النهاية و الإتجاه

تكافوء قطعتين مستقيمتين موجهتين

يقال لقطعتين مسستقيمتين أنهما متكافئتان إذا كانتا : (١) لهما نفس الطول (المعيار) (٢) لهما نفس الإتجاه

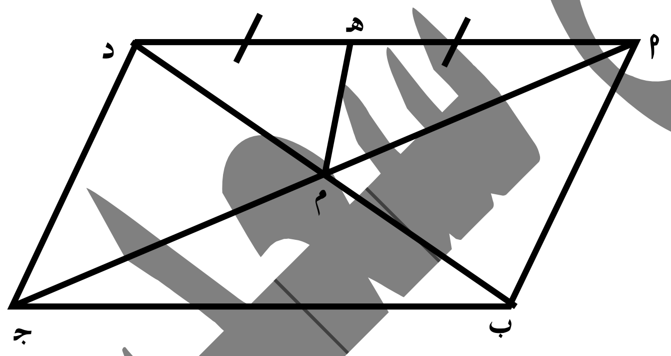


فمثـــلا : $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ (لهما نفس الطول و الإتجاه)

$\overleftarrow{\text{أب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ (مختلفتان فى الطول و الإتجاه)

١ فى الشكل المقابل : أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

أكمـــــل



- $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{دأ}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{م ب}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{أم}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{دم}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{د ب}}$ و السبب ....
- $\overleftarrow{\text{أد}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ و السبب ....

تدريب

أكمــــــل العبارات التالية

(١) الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفا تاما معرفة ....

(٢) الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفا تاما معرفة .... ، ....

(٣) القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها .... ، .... ، ....

(٤) تتكافئ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما .... ، ....

المتجهات

متجه الموضع : ① القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{وأ}}$ و التى بدايتها نقطة الأصل و نهايتها النقطة المعلومة أ و تكتب إختصارا $\overrightarrow{\text{أ}}$ تسمى متجه الموضع للنقطة أ(س ، ص)

② متجه الموضع $\overrightarrow{\text{وأ}}$ يقال أنه التمثيل الهندسى للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص)

معيار المتجه : هو طول القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه

فمثلا : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

متجه الوحدة : هو متجه معياره الواحد الصحيح و من أمثلته :- $\overrightarrow{\text{سـ}}$ = (١ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{صـ}}$ = (٠ ، ١)

المتجه الصفرى : هو متجه معياره يساوى الصفر و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{و}}$ أ، $\overrightarrow{٠}$ حيث : $\overrightarrow{\text{و}}$ = (٠ ، ٠)
و هو متجه غير معين الإتجاه

الصورة القطبية لمتجه الموضع : $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ ، θ) حيث : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ معيار المتجه

الصورة الإحداثية لمتجه الموضع : $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ ، $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جا θ)

٢ أكتب فى الصورة الإحداثية كلا من المتجهات التالية

① $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($١٠\sqrt{٣}$ ، ٦٠°) ② $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($٦\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

الحـــــل

① $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($١٠\sqrt{٣}$ جتا ٦٠ ، $١٠\sqrt{٣}$ جا ٦٠) = ($٥\sqrt{٣}$ ، ١٥)

② $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($٦\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥ ، $٦\sqrt{٢}$ جا ١٣٥) = (– ٦ ، ٦)

٣ أكتب فى الصورة القطبية كلا من المتجهات التالية

① $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٤ ، $٤\sqrt{٣}$) ② $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = ($٥\sqrt{٣}$ ، –٥)

الحـــــل

① $\|\overrightarrow{\text{وأ}}\| = \sqrt{(٤)^2 + (٤\sqrt{٣})^2} = \sqrt{١٦ + ٤٨} = \sqrt{٦٤} = ٨$

ظا $\theta = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$ ∴ ق ∠ θ = ٦٠°

$\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٨ ، ٦٠°)

○ $\|\overrightarrow{\text{وأ}}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^2 + (-٥)^2} = \sqrt{٧٥ + ٢٥} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

ظا $\theta = -\frac{٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ق ∠ θ = ٣٠°

$\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (١٠ ، ٣٠°)

المتجهات المتكافئة

كل متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) يمكن تمثيله هندسيا بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة و التى كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

جمع متجهين جبريا

إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) ∈ $ح^٢$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ($س_٢$ ، $ص_٢$) ∈ $ح^٢$

فإن: $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = ($س_١$ + $س_٢$ ، $ص_١$ + $ص_٢$)

خواص جمع المتجهات:

١ **خاصية الإبدال:** $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{أ}$

٢ **خاصية الدمج (التجميع):** $\overrightarrow{أ}$ + ($\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{ج}$) = ($\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) + $\overrightarrow{ج}$

٣ **المتجه الصفرى:** $\overrightarrow{و}$ = (٠ ، ٠) **و يكون:** $\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{و}$ = $\overrightarrow{أ}$ **(عنصر محايد)**

٤ **المعكوس الجمعى:** **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) **فإن:** ($-\overrightarrow{أ}$) = (−س ، −ص)

فإن: $\overrightarrow{أ}$ + ($-\overrightarrow{أ}$) = $\overrightarrow{و}$

٥ **خاصية الحذف:** **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ج}$ **فإن:** $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ج}$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى

إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) ، ك ∈ ح **فإن:** ك $\overrightarrow{أ}$ = ك(س ، ص) = (ك س ، ك ص)

فمثلا: **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٥) **فإن:** ٢$\overrightarrow{أ}$ = ٢ (−٣ ، ٥) = (٢ × −٣ ، ٢ × ٥) = (−٦ ، ١٠)

مـــلاحظات هامة

إذا كان: $\overrightarrow{ب}$ = ك $\overrightarrow{أ}$

١ ك > ٠ ⇐ $\overrightarrow{ب}$ // $\overrightarrow{أ}$ **و لهما نفس الإتجاه**

٢ ك < ٠ ⇐ $\overrightarrow{ب}$ // $\overrightarrow{أ}$ **و لهما إتجاهين مختلفين**

أمثـــــلة

① **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٠) **فأوجد:** $\overrightarrow{ج}$ = ٢$\overrightarrow{أ}$ + ٤$\overrightarrow{ب}$

الحـــــــــــل

$\overrightarrow{ج}$ = ٢$\overrightarrow{أ}$ + ٤$\overrightarrow{ب}$ = ٢(−٣ ، ٢) + ٤(٤ ، ٠) = (−٦ ، ٤) + (١٦ + ٠) = (١٠ ، ٤)

② **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ج}$ = (١ ، ١) **فأوجد:** $\overrightarrow{أ}$ + ٣$\overrightarrow{ب}$ − ٢$\overrightarrow{ج}$

الحـــــــــــل

$\overrightarrow{أ}$ + ٣$\overrightarrow{ب}$ − ٢$\overrightarrow{ج}$ = (٣ ، −١) + ٣ (٠ ، ٢) − ٢(١ ، ١) = (٣ + ٠ −٢ ، −٣ + ٦ − ٢) = (١ ، ١)

③ **أوجد العددين** ك ، م **إذا كان:** (ك ، ٢) + (٤ ، م) = (١ ، ١)

الحـــــــــــل

∵ (ك ، ٢) + (٤ ، م) = (١ ، ١)

∴ ك + ٤ = ١ ⇐ ك = ١ − ٤ = −٣ ، ٢ + م = ١ ⇐ م = ١ − ٢ = −١

④ **إذا كان:** $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٠) ، $\overrightarrow{ج}$ = (س ، ص) **فأوجد العددين** س ، ص

بحيث: $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ − ٢ $\overrightarrow{ج}$

الحـــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} - ٢\overrightarrow{\text{جـ}}$ ∴ (−٣ ، ٤) = (١ ، ٠) − ٢(س ، ص)

∴ −٣ = ١ − ٢س ⇐ ٢س = ٤ ⇐ س = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ٤ = ٠ − ٢ص ⇐ −٢ص = ٤ ⇐ ص = −$\frac{٤}{٢}$ = ٢

⑤ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، −٢) **فعبر عن** $\overrightarrow{\text{ب}}$ **بدلالة** $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$

الحـــــــــــــل

نفرض أن : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⇐ (٦ ، ٤) = ك (١ ، ٢) + م (٣ ، −٢)

∴ ٦ = ك + ٣م ← ①

∴ ٤ = ٢ك −٢م ← ②

∴ −١٢ = −٢ك − ٦م

بالجمع

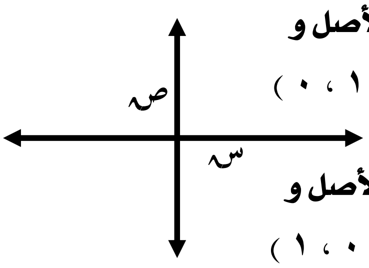
− ٨ = − ٨ م ⇐ م = ١

بالتعويض ى المعادلة ①

∴ ٦ = ك + ٣

∴ ك = ٦ − ٣ = ٣

متجهى الوحدة الأساسيين :-



$\boxed{١}$ **متجه الوحدة الأساسى** $\overrightarrow{\text{س}}$ **هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل و معيارها الوحدة و إتجاهها هو الإتجاه الموجب لمحور السينات : أى أن :** $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠)

$\boxed{٢}$ **متجه الوحدة الأساسى** $\overrightarrow{\text{ص}}$ **هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل و معيارها الوحدة و إتجاهها هو الإتجاه الموجب لمحور الصادات : أى أن :** $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١)

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :-

المتجه : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) **بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = س $\overrightarrow{\text{س}}$ + ص $\overrightarrow{\text{ص}}$

فمثلا :- $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ **أو** $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٠ ، ٥) = ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

توازى متجهين و تعامدهما

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($س_٢$ ، $ص_٢$) **فإن :-**

① **يكون :** $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$ **إذا كان :** $س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١$ = صفر **و العكس صحيح**

② **يكون :** $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ **إذا كان :** $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢$ = صفر **و العكس صحيح**

$\boxed{٨}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، −٩) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، ٢)

فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$

الحـــــــــــــل

∵ −٤×−٩ − ٦ ×٦ = ٣٦ − ٣٦ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{أ}} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ب}}$

∵ ٦ × ٣ + (−٩ × ٢) = ١٨ − ١٨ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{جـ}}$

∵ −٤ × ٣ + ٦ × ٢ = −١٢ + ١٢ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{جـ}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$

أمثلة

١ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (−٣ ، ك) **متوازيين فإن:** ك = ...

الحل

∵ **المستقيمان متوازيين فإن:** $\text{س}_1 \text{ص}_2 - \text{س}_2 \text{ص}_1$ = صفر

∴ −٢ك − ١ × −٣ = ٠ ⇐ −٢ك + ٣ = ٠ ⇐ ك = $\frac{٣}{٢}$

٢ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$ **فأوجد:** ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$) − (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$) = (٤ − ٣) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (٦ + ١) $\overrightarrow{\text{ص}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧$\overrightarrow{\text{ص}}$

٣ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، −٢) **فإن:** ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$‖ = ...

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٢) − (١ ، −٢) = (٤ − ١ ، ٢ + ٢) = (٣ ، ٤)

∴ ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$‖ = $\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ **وحدات طول**

٤ إذا كان: ‖٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ‖−١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ **فأوجد قيمة ك**

الحل

∵ ‖٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ‖−١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ ⇐ ٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ± ١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ⇐ ٣ك = ± ١٥

∴ ك = ± ٥

٥ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ **فأوجد:**

$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، ‖$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$‖ ، ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، −٣$\overrightarrow{\text{أ}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) + (−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) − (−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$

‖$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$‖ = $\sqrt{(٢)^2 + (-٦)^2}$ = $\sqrt{٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{٤٠}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ **وحدات طول**

٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) + ٣(−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) − ٣(−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٦$\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٠$\overrightarrow{\text{ص}}$

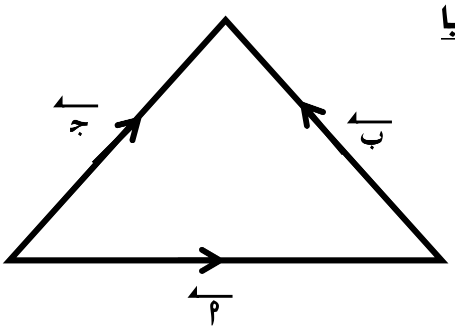
−٣$\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٣(٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) = −٩$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

تدريب

إذا كان: ‖−٨ $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ = ٥ ‖ك $\overrightarrow{\text{أ}}$‖ **فأوجد قيمة ك**

العمليات على المتجهات

أولا : جمع المتجهات هندسيا



١ قاعدة المثلث (علاقة شال)

$\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$

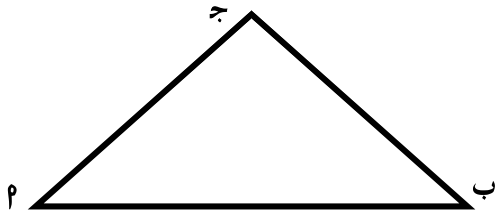
لاحظ أن : نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى نفس نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ هى نفس نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{ج}}$

ملاحظـــــات هامة :

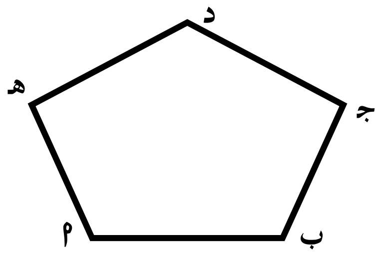
① لأى ثلاث نقاط على إستقامة واحدة يكون :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$



② فى أى مثلث أ ب ج يكون :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ **(المتجه الصفرى)**

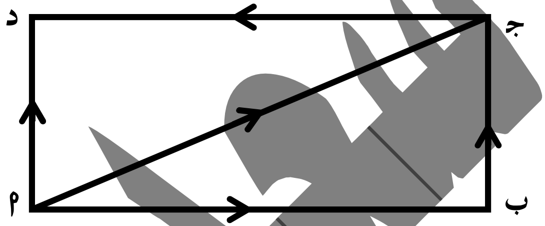


و بالتعميم :

فى الشكل الخماسى المقابل :

يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ **(المتجه الصفرى)**

③ $\because \overrightarrow{\text{أب}} = - \overrightarrow{\text{ب أ}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ **(المتجه الصفرى)**



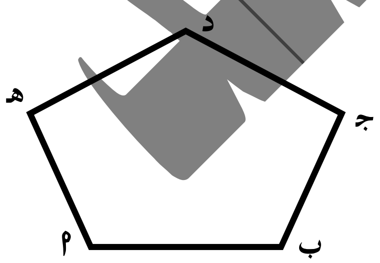
④ فى أى شكل رباعى يكون :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$

التفسير :-

$\because \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$



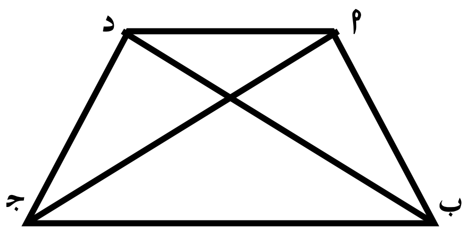
و بالتعميم :

فى الشكل الخماسى المقابل :

يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} = \overrightarrow{\text{أ هـ}}$

أمثـــــــــــلة

١ فى أى شكل رباعى أ ب ج د أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ج}} - \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ د}} - \overrightarrow{\text{ب د}}$

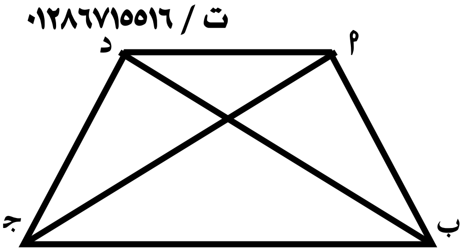


الحــــــــــــــل

$\because \overrightarrow{\text{أ ج}} - \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ج ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

$\because \overrightarrow{\text{أ د}} - \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{أ د}} + \overrightarrow{\text{د ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

$\therefore$ **الطرفان متساويان**



[٢] أ ب ج د شكل رباعى فيه : ٢ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

أثبت أن :-

(١) أ ب ج د شبه منحرف (٢) $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

الحـــــــــــــــــل

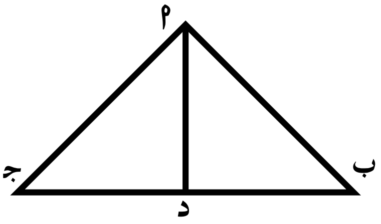
(١) ∵ ٢ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ // $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ، ∵ ب ج ≠ أ د

∴ أ ب ج د شبه منحرف

(٢) فى Δ أ د ج : $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{د ج}}$ ، فى Δ د ب ج : $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ج د}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{د ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ + $\overrightarrow{\text{د ج}}$ − $\overrightarrow{\text{د ج}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ج}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = $\frac{٢}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\overrightarrow{\text{أ د}}$



[٣] أ ب ج مثلث ، د ∈ $\overline{\text{ب ج}}$ بحيث : ٣ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{د ج}}$

أثبت أن : ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

الحـــــــــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ × ٣ ⇐ ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ × ٤ ⇐ ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

بالجمع

∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{د ج}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ج د}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

∴ ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{أ د}}$

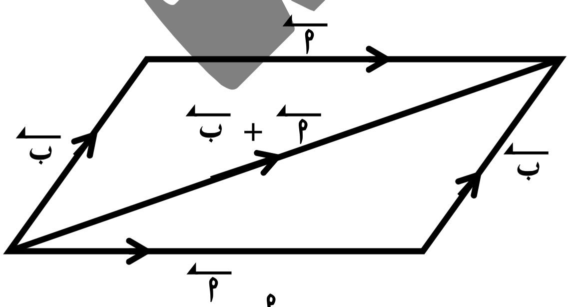
[٤] إذا كان : ٤ $\overrightarrow{\text{م}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{ج أ}}$

الحـــــــــــــــــل

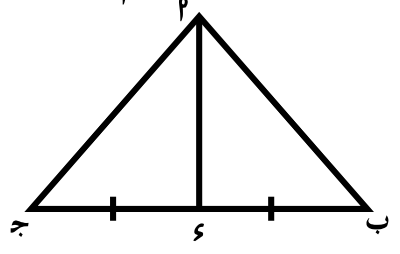
٤ $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

= ٤ ($\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$) ⇐ $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = $\overrightarrow{\text{ج أ}}$

[٢] قاعدة متوازى الأضلاع



لاحظ أن : نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى نفس نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ هى نفس نقطة نهاية المتجه ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$)

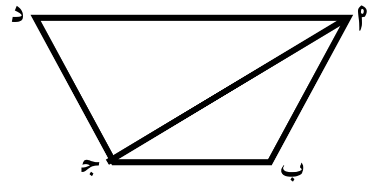


مُـــــلاحظة هامة :

(١) إذا كان : $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب ج فإن : $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ج}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

٥ **فى الشكل الرباعى أ ب ج د**

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{جد}} = \overrightarrow{\text{أد}}$

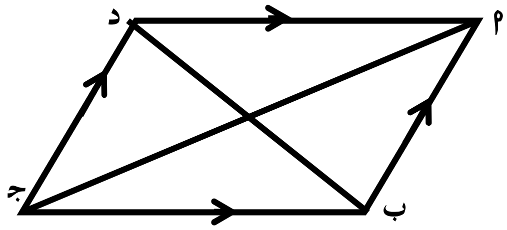


الحـــــــل

فى $\triangle$ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{جد}} = (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}}) + \overrightarrow{\text{جد}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{جد}} = \overrightarrow{\text{أد}}$

٦ **فى متوازى الأضلاع** أ ب ج د **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{بد}} = ٢\,\overrightarrow{\text{بج}}$



الحـــــــل

$\because$ $\overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}}$ ، $\because$ $\overrightarrow{\text{بد}} = \overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أد}}$

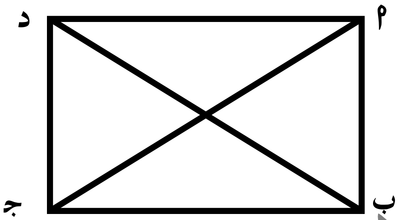
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{بد}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أد}}$

$= (\overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{أد}}) + (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بأ}})$　　$\because$ $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{بأ}}$

$= \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{أد}}$　　$\because$ $\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{بج}}$

$= \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{بج}} = ٢\,\overrightarrow{\text{بج}}$

٧ **فى أى شكل رباعى** أ ب ج د **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{دب}} - \overrightarrow{\text{جب}} = \overrightarrow{\text{دأ}} - \overrightarrow{\text{جأ}}$



الحـــــــل

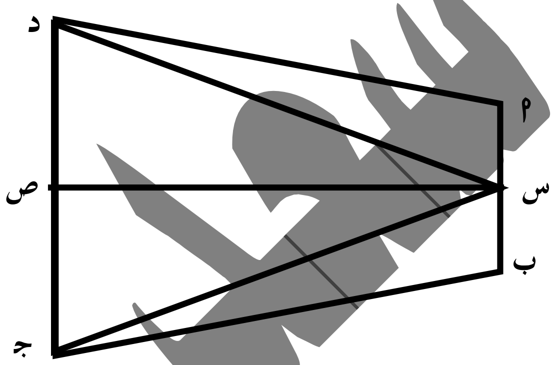
الطرف الأيمن $= \overrightarrow{\text{دب}} - \overrightarrow{\text{جب}} = \overrightarrow{\text{دب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{دج}}$

الطرف الأيسر $= \overrightarrow{\text{دأ}} - \overrightarrow{\text{جأ}} = \overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{دج}}$

$\therefore$ **الطرفان متساويان**

٨ أ ب ج د **شكل رباعى فيه :** س **منتصف** $\overline{\text{أب}}$ ، ص **منتصف** $\overline{\text{جد}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{أد}} = ٢\,\overrightarrow{\text{سص}}$



الحـــــــل

$\because$ س **منتصف** $\overline{\text{أب}}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{\text{أس}} = \overrightarrow{\text{سب}}$

فى $\triangle$ س أ د : $\overrightarrow{\text{سأ}} + \overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{سد}}$ ← (١)

فى $\triangle$ س ب ج : $\overrightarrow{\text{سب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{سج}}$ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

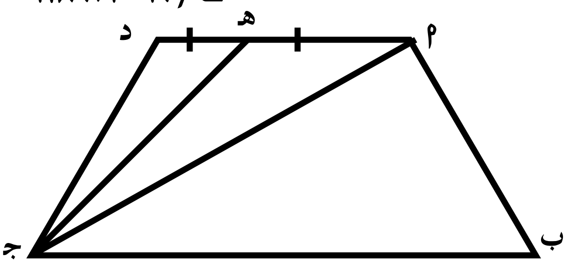
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{سأ}} + \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{سب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{سأ}} + \overrightarrow{\text{أد}} - \overrightarrow{\text{سأ}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بج}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{سد}} + \overrightarrow{\text{سج}}$

$\because$ ص **منتصف** $\overline{\text{جد}}$ $\Leftarrow$ $\overline{\text{سص}}$ **متوسط فى** $\triangle$ ج س د

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{سد}} + \overrightarrow{\text{سج}} = ٢\,\overrightarrow{\text{سص}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{أد}} = ٢\,\overrightarrow{\text{سص}}$



٩ أ ب جـ د شبه منحرف فيه : $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أد}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

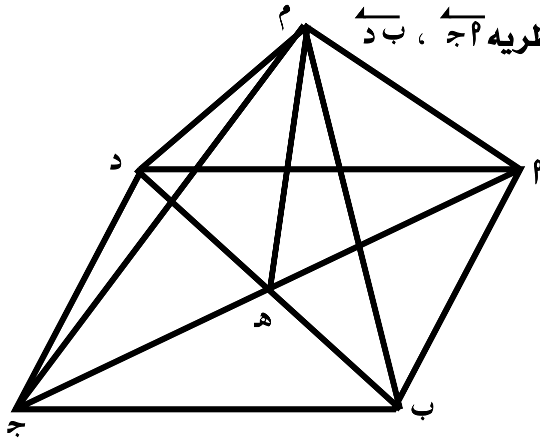
الحــــــــل

في △ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

في △ جـ أ د : ∵ هـ منتصف أد ⟸ $\overline{\text{جـهـ}}$ متوسط في △ أ جـ د

∴ $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{جـهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}}) + \overrightarrow{\text{دجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{جـهـ}}$



(١٠) أ ب جـ د متوازي أضلاع : م نقطة في مستويه ،هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بد}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مجـ}} + \overrightarrow{\text{مد}} = ٤\,\overrightarrow{\text{مهـ}}$

الحــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مجـ}} + \overrightarrow{\text{مد}}$

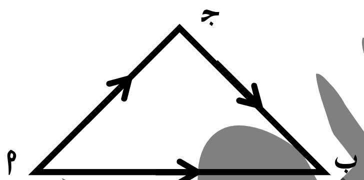
$= (\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مجـ}}) + (\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مد}})$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{مهـ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{مهـ}} = ٤\,\overrightarrow{\text{مهـ}}$

لاحظ أن :

$\overline{\text{مهـ}}$ متوسط في △ م أ جـ ، $\overline{\text{مهـ}}$ متوسط في △ م ب د

ثانيا : طرح متجهين هندسيا



$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

لأن :

$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهي الموضع فيها

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

١ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : أ(٢ ، −٢) ، ب(٤ ، −٢) ، جـ(٢ ، ٣) فأوجد إحداثيي نقطة د

الحــــــــل

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ $\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}} - \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{د}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) + (٢ ، −٢) = (٢ − ٤ + ٢ ، ٣ + ٢ − ٢) = (٠ ، ٣)

٢ أ ب جـ د شبه منحرف فيه : أ(−١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، جـ(٥ ، −١) ، د(−٥ ، م)

(١) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{دجـ}}$ فأوجد قيمة م

(٢) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـب}} \perp \overrightarrow{\text{أب}}$

(٣) أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

الحـــــــــــل

① أب = ب − أ = (٣ ، ٣) − (−١ ، ١) = (٤ ، ٢)

دج = ج − د = (٥ ، −١) − (−٥ ، م) = (١٠ ، −١ − م)

∵ أب // دج ∴ س١ ص٢ − س٢ ص١ = صفر

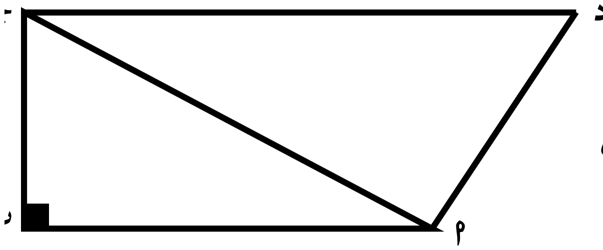
∴ ٤(−١ − م) − ٢ × ١٠ = صفر ⇐ −٤ − ٤م − ٢٠ = صفر ⇐ −٤م − ٢٤ = صفر

∴ م = −٦

② جب = ب − ج = (٣ ، ٣) − (٥ ، −١) = (−٢ ، ٤)

∵ س١ س٢ + ص١ ص٢ = −٢ × ٤ + ٤ × ٢ = −٨ + ٨ = صفر

∴ جب ⊥ أب



③ || أب || = √(١٦+٤) = √٢٠ = ٢√٥ وحدة طول

|| دج || = √(١٠٠ + ٢٥) = √١٢٥ = ٥√٥ وحدة طول

|| جب || = √(٤ + ١٦) = √٢٠ = ٢√٥ وحدة طول

∵ مساحة شبه المنحرف = ١/٢ حاصل جمع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= ١/٢ (|| أب || + || دج ||) × || جب ||

= ١/٢ (٢√٥ + ٥√٥) × ٢√٥ = ٣٥ وحدة مربعة

تدريـــــــب

إذا كان : ٢ م + ٣ أب = ٢ جب − بأ أثبت أن : م = جأ

تطبيقات على المتجهات

أولا : تطبيقات هندسية

نعلم أنه إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = ك\ \overrightarrow{\text{ءج}}$ ، ك $\neq$ ٠   فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءج}}$

يحملهما مستقيم واحد   أى أن : أ ، ب ، ج ، ء على استقامة واحدة

أو

يحملهما مستقيمان متوازيان   أى أن : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ءج}}$

مـــــلاحظات هامة

إذا كان : أ ب ج ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = ك\ \overrightarrow{\text{ءج}}$ ، ك $\neq$ ٠

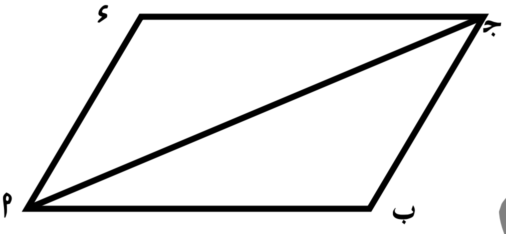
فإن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءج}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = |ك|\ \|\overrightarrow{\text{ءج}}\|$ و العكس صحيح

فمثــــــلا:- إذا كان : أ ب ج ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\ \overrightarrow{\text{جء}}$

فإن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{جء}}$ ، أب = ٣ جء

أمثـــــــلة

١ أثبت أن : إذا تساوى و توازى ضلعين متقابلين فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين و متوازيين أيضا   أى أن : الشكل يكون متوازى أضلاع



الحـــــــــل

$\because$ أب = ءج ، $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءج}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءج}}$

فى $\triangle$ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

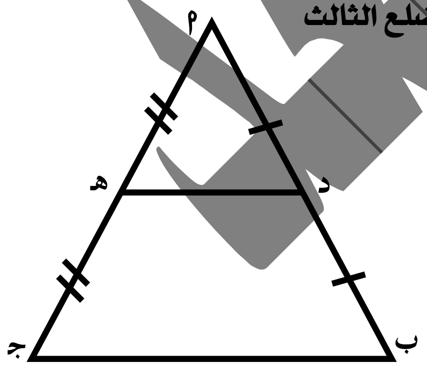
فى $\triangle$ أ ء ج : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءج}}$ ، $\because \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءج}}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أء}}$

$\therefore \overline{\text{بج}} \parallel \overline{\text{أء}}$ ، بج = أء

$\therefore$ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

٢ أثبت أن: القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث و طولها يساوى نصف طوله



الحـــــــــل

$\because$ د ، هـ منتصفى $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أج}}$ على الترتيب

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أج}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أهـ}}$

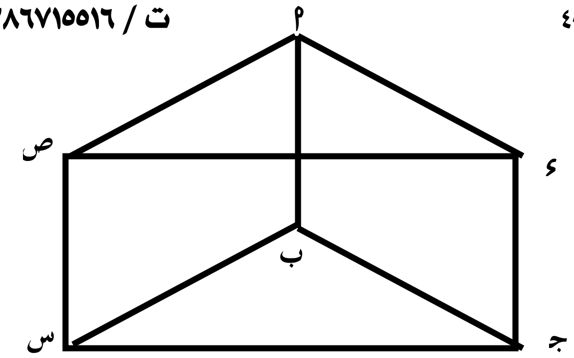
فى $\triangle$ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{بج}}$ $\longleftarrow$ (١)

فى $\triangle$ أ د هـ : $\overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \overrightarrow{\text{دهـ}}$ $\longleftarrow$ (٢)

من (١) ، (٢) $\Leftarrow$ $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أج}} = ٢\ \overrightarrow{\text{دأ}} + ٢\ \overrightarrow{\text{أهـ}} = ٢\ (\overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}}) = ٢\ \overrightarrow{\text{دهـ}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{بج}} = ٢\ \overrightarrow{\text{دهـ}} = ك\ \overrightarrow{\text{دهـ}}$ $\Leftarrow$ $\overline{\text{بج}} \parallel \overline{\text{دهـ}}$

$\therefore$ بج = ٢ دهـ $\Leftarrow$ دهـ $= \frac{١}{٢}$ بج



٣ في الشكل المقابل : أ ب ج ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع
أثبت باستخدام المتجهات أن :
الشكل ج س ص ء متوازى أضلاع

الحـــــــــــل

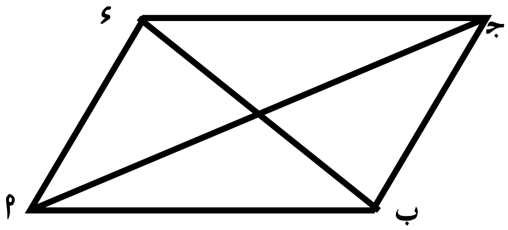
∵ أ ب ج ء متوازى أضلاع ∴ $\overline{\text{ءج}} = \overline{\text{أب}}$

∵ أ ب س ص متوازى أضلاع ∴ $\overline{\text{صس}} = \overline{\text{أب}}$

∴ $\overline{\text{ءج}} = \overline{\text{صس}}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{ءج}} = \overrightarrow{\text{صس}}$

∴ الشكل ج س ص ء متوازى أضلاع

٤ أ ب ج ء شكل رباعى ، إذا كان : $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ءج}}$ فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع



الحـــــــــــل

في Δ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}}$

في Δ ء ب ج : $\overrightarrow{\text{ءب}} = \overrightarrow{\text{ءج}} + \overrightarrow{\text{جب}}$

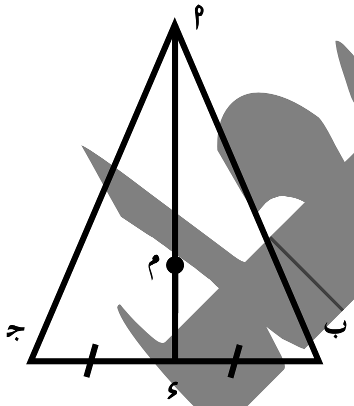
∴ $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{ءج}} + \overrightarrow{\text{جب}}$

$= \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{ءج}} - \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ءج}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\,\overrightarrow{\text{ءج}}$ ∴ $٢\,\overrightarrow{\text{ءج}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ءج}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ءج}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

∴ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

٥ إذا كان : أ (٦ ، ٥) ، ب (٨ ، −٣) ، ج (−٢ ، −٥) هى رؤوس المثلث أ ب ج فأوجد بإستخدام المتجهات نقطة تقاطع متوسطاته



الحـــــــــــل

∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

∴ $\overrightarrow{\text{أم}} = \frac{٢}{٣}\,\overrightarrow{\text{أء}}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{أء}} = \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أم}}$

في Δ أ ب ج : ∵ أ ء متوسط ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أج}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أج}} = ٢ \times \frac{٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{أم}} = ٣\,\overrightarrow{\text{أم}}$

∴ $(\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}) + (\overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = ٣\,(\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{أ}})$

∴ $\overrightarrow{\text{م}} = \frac{١}{٣}(\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}} + \overrightarrow{\text{أ}}) = \frac{١}{٣}($ ٦ + ٨ − ٢ ، ٥ − ٣ − ٥ $)$ = (٤ ، −١)

∴ نقطة تقاطع متوسطات المثلث هى (٤ ، −١)

٦ إذا كان : أ (٥ ، ١) ، ب (٢ ، ٥) ، ج (−٢ ، ٣) ، ء (−٥ ، −٤) فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء شبه منحرف

الحـــــــــــل

$\overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٣) − (٢ ، ٥) = (−٤ ، −٢)

$\overrightarrow{\text{أء}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٥ ، −٤) − (٥ ، ١) = (−١٠ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ∴ $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{أ ء}}$

∵ س ١ ص ٢ − س ٢ ص ١ = −٤ × −٥ + ٢ × −١٠ = ٢٠ − ٢٠ = صفر

∴ $\overrightarrow{\text{ب ج}} \parallel \overrightarrow{\text{أ ء}}$

∵ || $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ || = $\sqrt{١٦ + ٤}$ = $\sqrt{٢٠}$ = ٢$\sqrt{٥}$ **وحدة طول**

∵ || $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ || = $\sqrt{١٠٠ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥$\sqrt{٥}$ **وحدة طول**

∴ || $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ || ≠ || $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ||

∴ **الشكل أ ب ج ء شبه منحرف**

7 إذا كان : أ (٣ ، ٤) ، ب (١ ، −١) ، ج (−٤ ، −٣) ، ء (−٢ ، ٢) فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء معين

الحـــــــــل

$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −١) − (٣ ، ٤) = (−٢ ، −٥)

$\overrightarrow{\text{ء ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ء}}$ = (−٤ ، −٣) − (−٢ ، ٢) = (−٢ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ء ج}}$ ∴ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{ء ج}}$ ∴ أ ب = ء ج

∴ **الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع**

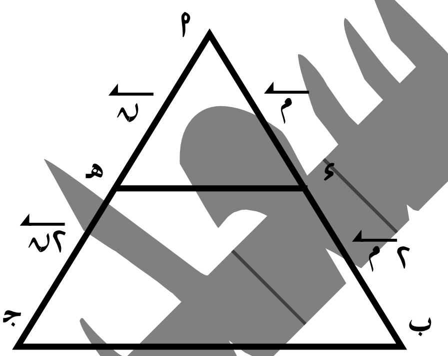
∵ $\overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، −٣) − (٣ ، ٤) = (−٧ ، −٧)

∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٢) − (١ ، −١) = (−٣ ، ٣)

∵ س ١ س ٢ + ص ١ ص ٢ = −٧ × −٣ + (−٧ × ٣) = ٢١ − ٢١ = صفر

∴ $\overline{\text{أ ج}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ **(القطران متعامدان)**

∴ **الشكل أ ب ج ء معين**



8 فى الشكل المقابل : أ ب ج مثلث فيه :

ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{م}}$

$\overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ء}} = ٢ \overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج هـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{ن}}$

اوجد $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ **بدلالة** $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$

ثم برهن أن : $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$

الحـــــــــل

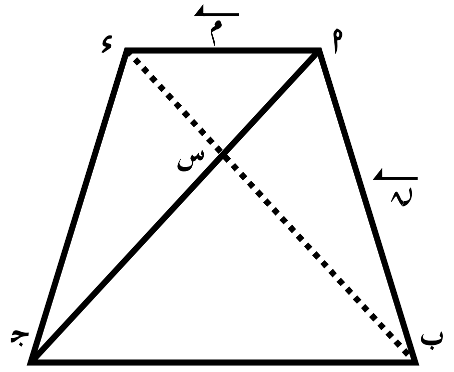
∵ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ء أ}} = ٢ \overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{م}} = ٣ \overrightarrow{\text{م}}$

∵ هـ ∈ $\overline{\text{أ ج}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{\text{ج هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ أ}} = ٢ \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{ن}} = ٣ \overrightarrow{\text{ن}}$

فى △ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} - \overrightarrow{\text{ج أ}} = ٣ \overrightarrow{\text{م}} - ٣ \overrightarrow{\text{ن}} = ٣ (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}})$

فى △ أ ء هـ : $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} - \overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب ج}} = ٣ \overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$



[٩] في الشكل المقابل : أ ب جـ ء شبه منحرف ، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{م}}$

(١) عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من : $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$

(٢) إذا كانت : س ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث : أ س = $\frac{١}{٣}$ أ جـ

أثبت أن النقط : ء ، س ، ب على استقامة واحدة

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ⇐ ب جـ = ٢ أ ء ∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ ء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{م}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{ن}} + ٢\,\overrightarrow{\text{م}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء جـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = -\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} + ٢\,\overrightarrow{\text{م}} = \overrightarrow{\text{ن}} + \overrightarrow{\text{م}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} = -\overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{ن}} - \overrightarrow{\text{م}}$

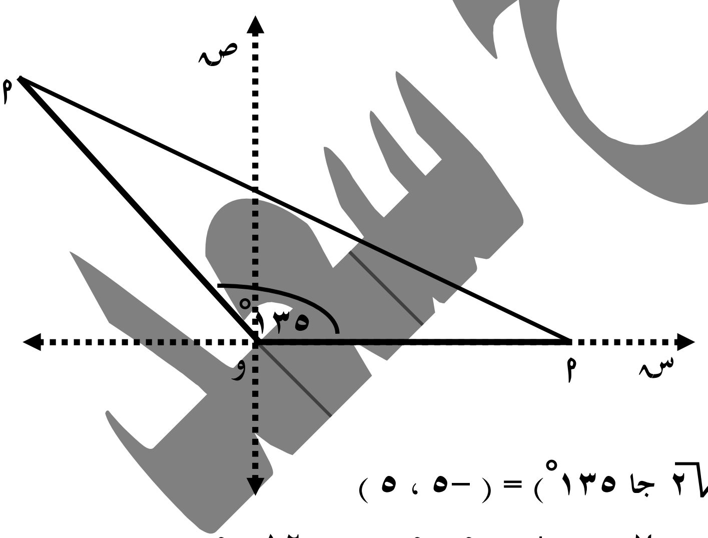
∵ أ س = $\frac{١}{٣}$ أ جـ ∴ أ جـ = ٣ أ س ∴ جـ س = ٢ جـ أ

∵ س ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{جـ س}} = ٢\,\overrightarrow{\text{جـ أ}}$

في △ ب س جـ : $\overrightarrow{\text{ب س}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ س}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ ء}} + ٢\,\overrightarrow{\text{أ جـ}} = ٢\,(\overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{جـ أ}}) = ٢\,\overrightarrow{\text{س ء}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ب س}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ء}}$ لهما نفس الإتجاه و مشتركان في نقطة س

∴ ء ، س ، ب على استقامة واحدة



(١٠) في الشكل المقابل : و أ ب مثلث فيه : و أ = ٧ سم

و ب = ٥$\sqrt{٢}$ سم ، ق∠أ و ب = ١٣٥°

أوجد باستخدام المتجهات : طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحـــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٧ ، صفر°)

= (٧ جتا ٠° ، ٧ جا ٠°) = (٧ ، ٠)

∵ $\overrightarrow{\text{و ب}}$ = (٥$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) = (٥$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° ، ٥$\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) = (−٥ ، ٥)

في △ أ و ب : $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{أ و}} + \overrightarrow{\text{و ب}} = -\overrightarrow{\text{و أ}} + \overrightarrow{\text{و ب}}$ = − (٧ ، ٠) + (−٥ ، ٥) = (−١٢ ، ٥)

∴ طول $\overline{\text{أ ب}}$ = || $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ || = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدة طول

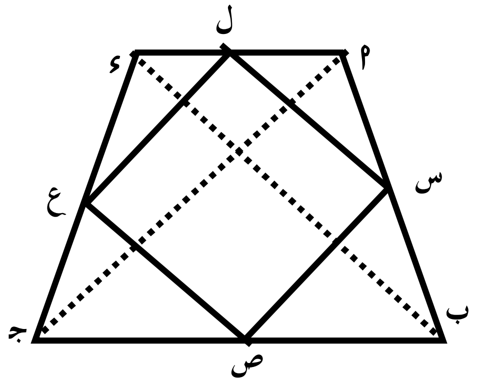
(١١) ٢ ب جـ ٤ **شكل رباعى فيه :** س ، ص ، ع ، ل **منتصفات الأضلاع** $\overline{\text{٢ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ٤}}$ ، $\overline{\text{٤ ٢}}$ **على الترتيب**

باستخدام المتجهات أثبت أن :

① **الشكل** س ص ع ل **متوازى أضلاع**

② **محيط الشكل** س ص ع ل **يساوى مجموع طولى ضلعى قطرى الشكل الرباعى**

الحـــــــــــــــــــــــــل



∵ س ، ص **منتصفا** $\overline{\text{ب ٢}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ **على الترتيب**

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{٢ جـ}}$ ، س ص = $\frac{١}{٢}$ ٢ جـ ⬚١⬚

∵ ل ، ع **منتصفا** $\overline{\text{٢ ٤}}$ ، $\overline{\text{٤ جـ}}$ **على الترتيب**

∴ $\overline{\text{ل ع}}$ // $\overline{\text{٢ جـ}}$ ، ل ع = $\frac{١}{٢}$ ٢ جـ ⬚٢⬚

من ⬚١⬚ ، ⬚٢⬚ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ص}}$ = $\overrightarrow{\text{ل ع}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{٢ جـ}}$ ⬚٣⬚

∴ **الشكل** س ص ع ل **متوازى أضلاع**

بالمثل : $\overrightarrow{\text{س ل}}$ = $\overrightarrow{\text{ص ع}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{\text{ب ٤}}$ ⬚٤⬚

من ⬚٣⬚ ، ⬚٤⬚

محيط متوازى الأضلاع س ص ع ل = ٢(س ص + ص ع) = ٢ ($\frac{١}{٢}$ ٢ جـ + $\frac{١}{٢}$ ب ٤) = ٢ جـ + ب ٤

ثانيا : تطبيقات فيزيائية

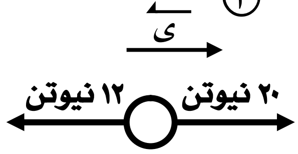
١ القوة المحصلة

$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٣}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

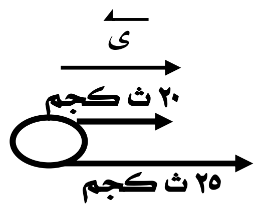
أمثـــــلة

① أكتب بدلالة متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ محصلة القوة الموضحة بالشكل :-

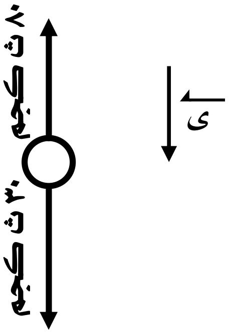
(أ)



(ب)



(جـ)



الحـــــــل

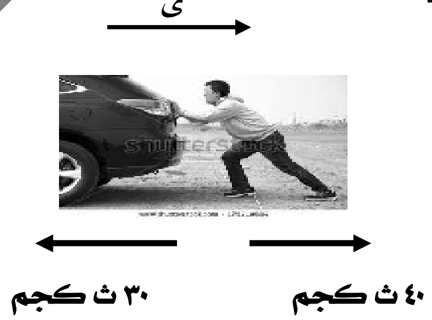
(أ) $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = ٢٠\,\overleftarrow{\text{ى}} - ١٢\,\overleftarrow{\text{ى}} = ٨\,\overleftarrow{\text{ى}}$

(ب) $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = ٢٠\,\overleftarrow{\text{ى}} + ٢٥\,\overleftarrow{\text{ى}} = ٤٥\,\overleftarrow{\text{ى}}$

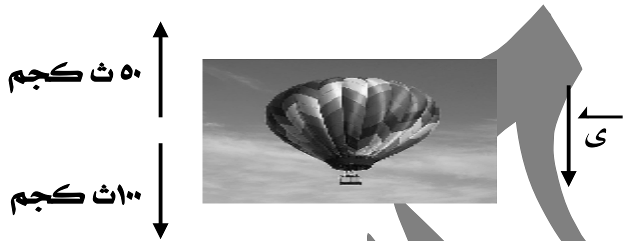
(جـ) $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = -٨٠\,\overleftarrow{\text{ى}} + ٣٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = -٥٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

② أوجد محصلة القوة المؤثرة فى كل مما يأتى :-

١



٢



الحـــــــل

١ $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = ٤٠\,\overleftarrow{\text{ى}} - ٣٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = ١٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

٢ $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = ١٠٠\,\overleftarrow{\text{ى}} - ٥٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = ٥٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

مـُــــلاحظة هامة :-

إذا كانت محصلة مجموعة من القوى = $\overleftarrow{٠}$ هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة و العكس صحيح

③ فى كل ممايلى : القوتان $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ تؤثران فى نقطة مادية ، وضح مقدار و إتجاه محصلة كل قوتين منها

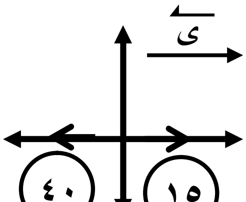
١ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ = ١٥ نيوتن فى إتجاه الشرق ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ = ٤٠ نيوتن فى إتجاه الغرب

٢ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ = ٣٤ نيوتن فى إتجاه الشمال الشرقى ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ = ٣٤ نيوتن فى إتجاه الجنوب الغربى

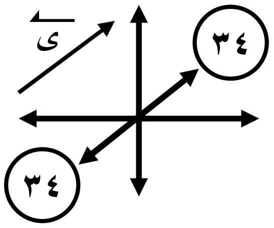
٣ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ = ٥٠ داين فى إتجاه ٦٠° غرب الشمال ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ = ٥٠ نيوتن فى إتجاه ٣٠° جنوب الشرق

٤ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ = ٣٠ نيوتن فى إتجاه ٢٠° شرق الشمال ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ = ٣٠ نيوتن فى إتجاه ٧٠° شمال الشرق

الحـــــــل

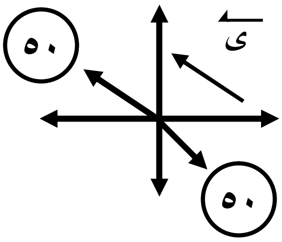


١ $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = ١٥\,\overleftarrow{\text{ى}} - ٤٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = -٢٥\,\overleftarrow{\text{ى}}$



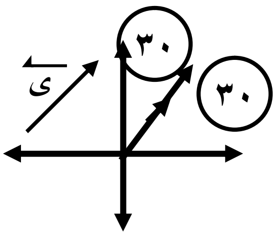
[٢] ق = ق$_1$ + ق$_2$ = ٣٤ ى − ٣٤ ى = ٠ ى

أو أن محصلة القوى = ٠ بمعنى ان القوى متزنة أو الجسم متزن (ثابت لا يتحرك)



[٣] ق = ق$_1$ + ق$_2$ = ٥٠ ى − ٥٠ ى = ٠ ى

أو أن محصلة القوى = ٠ بمعنى ان القوى متزنة أو الجسم متزن (ثابت لا يتحرك)



[٤] ق = ق$_1$ + ق$_2$ = ٣٠ ى + ٣٠ ى = ٦٠ ى

و تعمل فى إتجاه ٢٠° شرق الشمال (٧٠° شمال الشرق)

④ **إذا كانت القوى : ق$_1$ = ٢ س + ٣ ص ، ق$_2$ = أ س + ص ، ق$_3$ = ٥ س + ب ص تؤثر فى نقطة مادية فأوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى ق :**

(أ) ق = ٥ س − ٢ ص (ب) ق = ٠

الحـــــــــــل

(أ) ٥ س − ٢ ص = (٢ س + ٣ ص) + (أ س + ص) + (٥ س + ب ص)

∴ ٥ = ٢ + أ + ٥ ⟸ أ = ٥ − ٢ − ٥ = −٢

∴ −٢ = ٣ + ١ + ب ⟸ ب = −٢ − ٣ − ١ = −٦

(ب) ٠ = (٢ س + ٣ ص) + (أ س + ص) + (٥ س + ب ص)

∴ ٠ = ٢ + أ + ٥ ⟸ أ = −٢ − ٥ = −٧

∴ ٠ = ٣ + ١ + ب ⟸ ب = −٣ − ١ = −٤

تدريـــــــــب

إذا كانت القوى : ق$_1$ = ٧ س − ٥ ص ، ق$_2$ = أ س + ٣ ص ، ق$_3$ = −٤ س + (ب − ٣) ص تؤثر فى نقطة مادية فأوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى ق :

(أ) ق = ٥ س − ٢ ص (ب) مجموعة هذه القوى متزنة

٢ السرعة النسبية

إذا كان $\vec{ع}_{أ}$ هو متجه سرعة الجسم (أ) الفعلية ، $\vec{ع}_{ب}$ هو متجه سرعة الجسم (ب) الفعلية فإن :-

(أ) $\vec{ع}_{بأ}$ (متجه السرعة النسبية للجسم (ب) بالنسبة الى الجسم (أ)) = $\vec{ع}_{ب} - \vec{ع}_{أ}$

(ب) $\vec{ع}_{أب}$ (متجه السرعة النسبية للجسم (أ) بالنسبة الى الجسم (ب)) = $\vec{ع}_{أ} - \vec{ع}_{ب}$

أمثـــــلة

(١) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠كم / س فإذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم / س على نفس الطريق فأوجد سرعة الدراجة بالنسبة الى السيارة عندما يتحركان فى نفس الإتجاه

الحـــــــــــــل

نفرض أن $\vec{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه حركة السيارة

∴ $\vec{ع}_{أ}$ هو متجه سرعة السيارة = ٩٠ $\vec{ى}$ ، ∴ $\vec{ع}_{ب}$ هو متجه سرعة الدراجة = ٤٠ $\vec{ى}$

∴ $\vec{ع}_{بأ}$ (متجه السرعة النسبية للدراجة بالنسبة الى السيارة) = $\vec{ع}_{ب} - \vec{ع}_{أ}$ = ٤٠ $\vec{ى}$ − ٩٠ $\vec{ى}$ = − ٥٠ $\vec{ى}$

∴ سرعة الدراجة بالنسبة الى السيارة تساوى ٥٠ كم / س فى إتجاه مضاد لحركة السيارة

(٢) تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم / س راقبت هذه السيارة حركة سيارة قادمة فى الإتجاه المضاد فبدت و كأنها تتحرك بسرعة ١٣٥ كم / س فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم / س فهل السيارة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟

الحـــــــــــــل

نفرض أن $\vec{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه حركة سيارة المراقبة

∴ $\vec{ع}_{أ}$ هو متجه سرعة سيارة المراقبة = ٤٠ $\vec{ى}$

∴ $\vec{ع}_{بأ}$ متجه سرعة السيارة القدمة من الإتجاه المضاد بالنسبة لسيارة المراقبة = − ١٣٥ $\vec{ى}$

∴ $\vec{ع}_{بأ} = \vec{ع}_{ب} - \vec{ع}_{أ}$ ∴ − ١٣٥ $\vec{ى}$ = $\vec{ع}_{ب}$ − ٤٠ $\vec{ى}$

∴ $\vec{ع}_{ب}$ (متجه السرعة الفعلية للسيارة القادمة من افتجاه المضاد) = − ١٣٥ $\vec{ى}$ + ٤٠ $\vec{ى}$ = − ٩٥ $\vec{ى}$

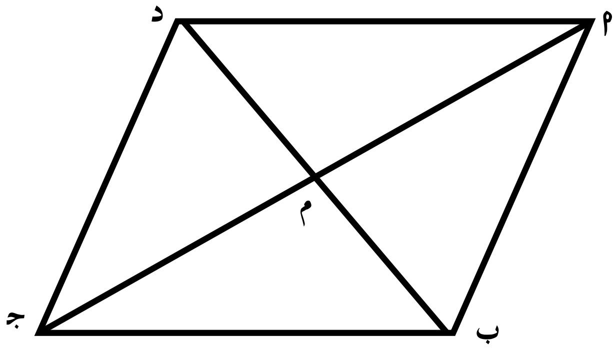
∴ السرعة الفعلية للسيارة القادمة من الإتجاهة المضاد لحركة سيارة المراقبة تساوى ٩٥ كم / س

∴ السيارة القادمة غير مخالفة للسرعة

مراجعة عامة على الوحدة الأولى من الكتاب المدرسى

[١] فى الشكل المقابل : أكمل ما يأتى

أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطريه فى نقطة م



① $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} =$ ....

② $\overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} =$ ....

③ $\overrightarrow{\text{أم}} + \overrightarrow{\text{جـم}} =$ ....

④ $\overrightarrow{\text{أب}} + ٢\,\overrightarrow{\text{بم}} =$ ....

⑤ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ... = $٢\,\overrightarrow{\text{أم}}$

⑥ $\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أم}} =$ ....

الحـــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ② $\overrightarrow{\text{دب}}$ ③ و ④ $\overrightarrow{\text{أد}}$ ⑤ $\overrightarrow{\text{أد}}$ أ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ⑥ $\overrightarrow{\text{مب}}$

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلى :-

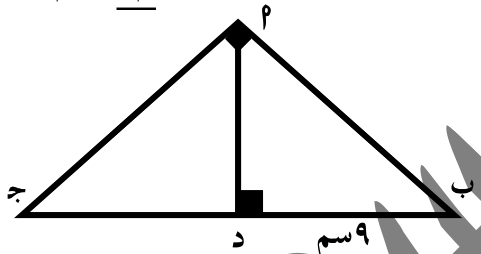
① **ميل المستقيم المار بالنقطتين** أ (٣ ، ٤) ، ب (−١ ، ٢) **يساوى** .... (−٢ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)

② **فى** △ أ ب جـ : ق ∠ أ = ٩٠° ، جتاجـ = ٠٫٦ **فإن** : ظا ب = ... (٠٫٤ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، −$\frac{٤}{٣}$)

③ **فى الشكل المقابل :** $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ ، ب جـ = ١٢سم ، ب د = ٩سم

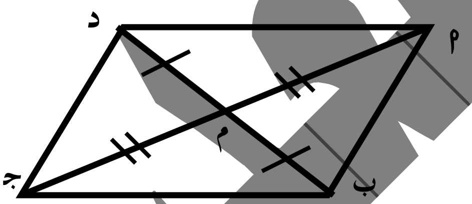
فإن : أ ب = ...

(٨√٣ ، ٦√٣ ، ٤√٣ ، ١٠)



④ **جميع العبارات التالية تعبر عن** $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ **ماعدا** ....

($٢\,\overrightarrow{\text{أم}}$ ، $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{دجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بد}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}}$)



⑤ **المتجه :** $\overrightarrow{\text{م}}$ = (١٢√٢ ، $\frac{\pi}{٤}$) **يعبر عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين على الصورة** ....

(٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ١٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، −٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ١٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

[٣] فى نظام إحداثى متعامد نقطة الأصل فيه و (٠ ، ٠) عين النقط : أ (−٤ ، ٠) ، ب (٠ ، −٣) ، جـ (٣ ، ١) ، د (٢ ، ٨) **ثم أوجد :**

① **متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (و) لكل من النقط :** أ ، ب ، جـ

② **متجه الموضع للنقطة (د) بالنسبة لنقطة الأصل (و) بالصورة القطبية**

③ **معيار القطعة المستقيمة الموجهة** $\overrightarrow{\text{أب}}$

④ **قيمة ك التى تجعل :** $\overrightarrow{\text{أد}}$ = ك $\overrightarrow{\text{بجـ}}$

الحـــــــــــل

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} = -٤\,\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{د}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\|\overrightarrow{\text{د}}\| = \sqrt{٤ + ٦٤} = \sqrt{٦٨} = ٢\sqrt{١٧}$ **وحدة طول**

ظا $\theta = \frac{٨}{٢} = ٤$ $\therefore \theta = ٧٥^\circ\ ٥٨'$

$\therefore \overrightarrow{\text{د}} = (٢\sqrt{١٧} ، ٧٥^\circ\ ٥٨')$

(٣) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، -٣) - (-٤ ، ٠) = (-٤ ، -٣)$

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ **وحدة طول**

(٤) $\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{د}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٨) - (-٤ ، ٠) = (٦ ، ٨)$

$\overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (٣ ، ١) - (٠ ، -٣) = (٣ ، ٤)$

$\because \overrightarrow{\text{أد}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{بج}} \Leftarrow (٦ ، ٨) = \text{ك}\ (٣ ، ٤) \Leftarrow \text{ك} = ٢$

٤ في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه و (٠ ، ٠) عين النقط : أ (١ ، −٤) ، ب (٤ ، ٠) ، ج (−٢ ، ١) ، د (١ ، ٥) **ثم أوجد :**

(١) **أوجد :** $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{جد}}\|$

(٢) **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أب}}$ **تكافئ** $\overrightarrow{\text{جد}}$

(٣) **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{بج}}$ **تكافئ** $\overrightarrow{\text{هد}}$ **فأوجد إحداثيي ه**

الحـــــــــــل

(١) $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، ٠) - (١ ، -٤) = (٤ - ١ ، ٠ + ٤) = (٣ ، ٤)$

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ **وحدة طول**

$\overrightarrow{\text{جد}} = \overrightarrow{\text{د}} - \overrightarrow{\text{ج}} = (١ ، ٥) - (-٢ ، ١) = (١ + ٢ ، ٥ - ١) = (٣ ، ٤)$

$\|\overrightarrow{\text{جد}}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ **وحدة طول**

(٢) $\because \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{جد}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{أب}}$ **تكافئ** $\overrightarrow{\text{جد}}$

(٣) $\because \overrightarrow{\text{بج}}$ **تكافئ** $\overrightarrow{\text{هد}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{هد}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{د}} - \overrightarrow{\text{ه}}$

$\therefore (-٢ ، ١) - (٤ ، ٠) = (١ ، ٥) - (\text{س} ، \text{ص})$

$\therefore -٢ - ٤ = ١ - \text{س} \Leftarrow \text{س} = ١ + ٦ = ٧$

$\therefore ١ = ٥ - \text{ص} \Leftarrow \text{ص} = ٥ - ١ = ٤$

$\therefore \overrightarrow{\text{ه}} = (٧ ، ٤)$

٥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = (١ ، ١٢)$

(١) **أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كلا من :** $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ج}}$ ، $\frac{١}{٢}(\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}})$

(٢) **عبر عن** $\overrightarrow{\text{ج}}$ **بدلالة** $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحـــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ج}}$ = (−١ ، ٦) − (١ ، ١٢) = (−٢ ، −٦) = −٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}$) = $\frac{1}{2}$ [(−١ ، ٦) + (١ ، ١٢)] = (٠ ، ٩) = ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$

② نفرض أن : $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ (١ ، ١٢) = ك (٤ ، ١) + م (−١ ، ٦)

∴ ٤ك − م = ١ ، ك + ٦م = ١٢

∴ ك = $\frac{١٨}{٢٥}$ ، ∴ م = $\frac{٤٧}{٢٥}$

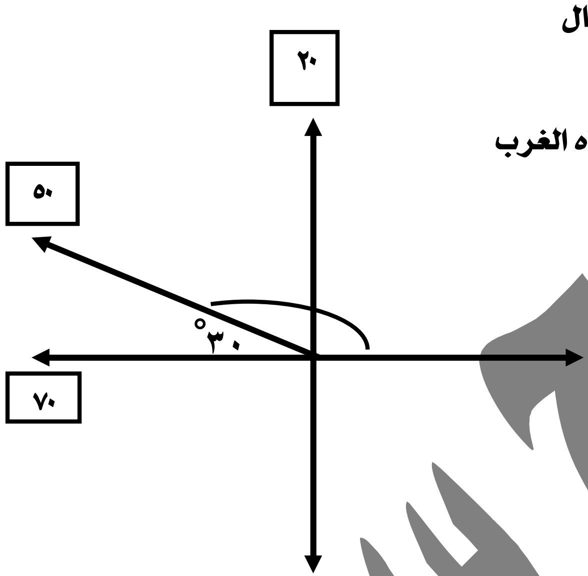
∴ $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\frac{١٨}{٢٥}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\frac{٤٧}{٢٥}$ $\overrightarrow{\text{ب}}$

٦ أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :-

① قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم و تعمل فى إتجاه الشمال

② إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم فى إتجاه ٣٠° شمال الغرب

③ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم / س فى إتجاه الغرب



الحـــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢٠ ، ٩٠°) = (٢٠ جتا ٩٠ ، ٢٠ جا ٩٠)

= (٠ ، ٢٠) = ٢٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

② $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٥٠ ، ١٥٠°) = (٥٠ جتا ١٥٠ ، ٥٠ جا ١٥٠)

= (−٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥) = −٢٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

③ $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٧٠ ، ١٨٠°) = (٧٠ جتا ١٨٠ ، ٧٠ جا ١٨٠)

= (−٧٠ ، ٠) = − ٧٠ $\overrightarrow{\text{س}}$

٧ إذا كان : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = −٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ب $\overrightarrow{\text{ص}}$

① أثبت ان : $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$ **② أوجد :** أ ∈ ح **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$

③ أوجد : ب ∈ ح **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ **④ هل :** $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{م}}$ **فسر إجابتك**

الحـــــــــــل

$\overrightarrow{\text{م}}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−٥ ، −١٠) ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (أ ، ١٠) ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢ ، ب)

① ∵ $\text{س}_{١}\,\text{ص}_{٢} - \text{س}_{٢}\,\text{ص}_{١}$ = ١ × −١٠ − (٢ × −٥) = −١٠ + ١٠ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$

② ∵ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$ ⇐ $\text{س}_{١}\,\text{ص}_{٢} - \text{س}_{٢}\,\text{ص}_{١}$ = صفر

∴ ١ × ١٠ − ٢ × أ = ٠ ⇐ أ = ٥

③ ∵ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ⇐ $\text{س}_{١}\,\text{س}_{٢} + \text{ص}_{١}\,\text{ص}_{٢}$ = ٠

∴ ٢ × ٥ + ١٠ ب = صفر ⇐ ب = −١

④ ∵ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، ∵ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{م}}$

$\boxed{٨}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، −٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (−٣ ، −٢)

① **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{ج}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$

② **أوجد :** ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ج}}$ ، $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ج}}$

الحـــــــــــل

① س١ ص٢ − س٢ ص١ = ٤ × ٩ − (−٦ × −٦) = ٣٦ − ٣٦ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$

س١ س٢ + ص١ ص٢ = −٦ × −٣ + (٩ × −٢) = ١٨ − ١٨ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب}} \perp \overrightarrow{\text{ج}}$

س١ س٢ + ص١ ص٢ = −٣ × ٤ + (−٢ × −٦) = −١٢ + ١٢ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{ج}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$

② ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٤ ، −٦) + (−٦ ، ٩) = (٨ − ٦ ، −١٢ + ٩) = (٢ ، −٣)

$\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ج}}$ = (−٦ ، ٩) − ٢(−٣ ، −٢) = (−٦ + ٦ ، ٩ + ٤) = (٠ ، ١٣)

$\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ج}}$ = $\frac{1}{2}$(٤ ، −٦) + (−٦ ، ٩) − ٣(−٣ ، −٢) = (٢ − ٦ + ٩ ، −٣ + ٩ + ٦)
= (٥ ، ١٢)

$\boxed{٩}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (١ ، −٤) ، أ (٢ ، ٣) ، ج (−١ ، ١٥)

أوجد قيمتى ل ، م **إذا كان :** ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ج}}$

الحـــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −٤) + (٢ ، ٣) = (٣ ، −١)

∵ ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ج}}$ ∴ ل (٢ ، ٣) − م (٣ ، −١) = (−١ ، ١٥)

∴ ٢ل − ٣ م = −١ ، ∴ ٣ ل + م = ١٥

∴ ل = ٤ ، م = ٣

(١٠) إذا كان : أ ب ج د **متوازى أضلاع حيث :** أ(٢ ، −٢) ، ب(٤ ، −٢) ، ج(٢ ، ٣) **اوجد إحداثيا نقطة** د

الحـــــــــــل

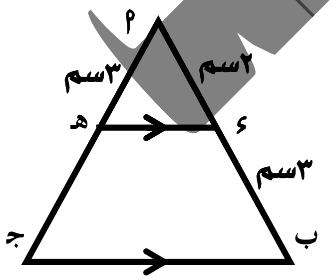
∵ أ ب ج د **متوازى أضلاع** ∴ $\overrightarrow{\text{أد}}$ = $\overrightarrow{\text{بج}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{ج}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ = $\overrightarrow{\text{ج}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) + (٢ ، −٢) = (٢ − ٤ + ٢ ، ٣ + ٢ − ٢) = (٠ ، ٣)

(١١) فى الشكل المقابل : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بج}}$ ، **أوجد قيم :** ك ، م ، ن **العددية إذا كان**

① $\overrightarrow{\text{بء}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ءأ}}$ ② $\overrightarrow{\text{جهـ}}$ = ل $\overrightarrow{\text{جأ}}$

③ $\overrightarrow{\text{بج}}$ = م $\overrightarrow{\text{هـء}}$ ④ $\overrightarrow{\text{أء}}$ + $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أج}}$



الحـــــــــــل

① ∵ ٢ $\overrightarrow{\text{بء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ءأ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{بء}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{\text{ءأ}}$ ⇐ ك = $\frac{٣}{٢}$

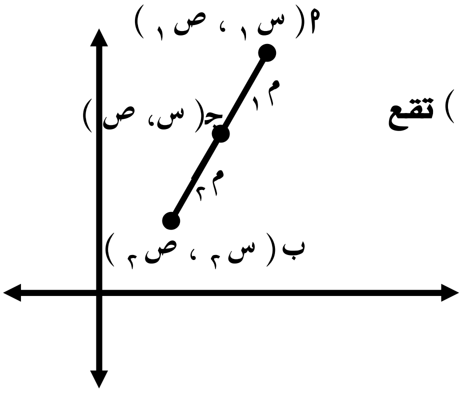
② ∵ ٥ $\overrightarrow{\text{جهـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جأ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{جهـ}}$ = $\frac{٣}{٥}$ $\overrightarrow{\text{جأ}}$ ⇐ ل = $\frac{٣}{٥}$

③ ∵ ٣ $\overrightarrow{\text{بج}}$ = − ٥ $\overrightarrow{\text{هـء}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{بج}}$ = −$\frac{٥}{٣}$ $\overrightarrow{\text{هـء}}$ ⇐ م = −$\frac{٥}{٣}$

④ ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ + $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أج}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أج}}$

∵ ٥ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أج}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\overrightarrow{\text{أج}}$ ⇐ ن = $\frac{٢}{٥}$

تقسيم قطعة مستقيمة



أولا : التقسيم من الداخل

فى الشكل المقابل : إذا كانت النقطة ج (س ، ص) تقع بين النقطتين أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$)

بحيث : $\frac{أج}{جب} = \frac{م_1}{م_2}$

فإن النقطة ج التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $م_1 : م_2$

و نوجد إحداثى نقطة ج (س ، ص) من العلاقتين :

$$س = \frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} \quad ، \quad ص = \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2}$$

أمثـــــــلة

$\boxed{١}$ **أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ حيث : أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥)**

الحـــــــــــــل

$م_1 = ١$ ، $م_2 = ٢$ ، $س_1 = ١$ ، $ص_1 = ٢$ ، $س_2 = ٤$ ، $ص_2 = ٥$

$$س = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٤ + ٢}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢ \quad ، \quad ص = \frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٥ + ٤}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

ج (٢ ، ٣)

$\boxed{٢}$ **أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ حيث : أ (−١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٨)**

الحـــــــــــــل

$م_1 = ٢$ ، $م_2 = ٣$ ، $س_1 = -١$ ، $ص_1 = ٣$ ، $س_2 = ٤$ ، $ص_2 = ٨$

$$س = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{١٦ + ٩}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

ج (١ ، ٥)

$\boxed{٣}$ **أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ٣ حيث أ (−٥ ، −٤) ، ب (٢ ، −٤)**

الحـــــــــــــل

$م_1 = ٤$ ، $م_2 = ٣$ ، $س_1 = -٥$ ، $ص_1 = -٤$ ، $س_2 = ٢$ ، $ص_2 = -٤$

$$س = \frac{٤ \times ٢ + ٣ \times -٥}{٤ + ٣} = \frac{٨ - ١٥}{٧} = \frac{-٧}{٧} = -١ \quad ، \quad ص = \frac{٤ \times -٤ + ٣ \times -٤}{٤ + ٣} = \frac{-١٦ - ١٢}{٧} = \frac{-٢٨}{٧} = -٤$$

ج (−١ ، −٤)

مُـــلاحظة هامة: إذا كانت ج (س ، ص) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب($س_٢$ ، $ص_٢$)

فإن: ج (س ، ص) = ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$)

$\boxed{٤}$ أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث: أ(٣ ، ٥) ، ب(١ ، −١)

الحـــــــــــــل

م = ($\frac{٣ + ١}{٢}$ ، $\frac{٥ - ١}{٢}$) = ($\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٤}{٢}$) = (٢ ، ٢)

$\boxed{٥}$ إذا كانت م (١ ، ٢) **منتصف $\overline{أب}$ حيث:** أ(س ، ١) ، ب(٣ ، ص)

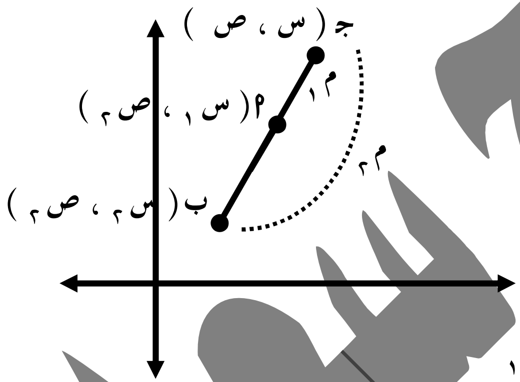
الحـــــــــــــل

(١ ، ٢) = ($\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ص}{٢}$)

∴ $\frac{س + ٣}{٢}$ = ١ ⇐ س + ٣ = ٢ ⇐ س = ٢ − ٣ = −١

∴ $\frac{١ + ص}{٢}$ = ٢ ⇐ ١ + ص = ٤ ⇐ ص = ٤ − ١ = ٣

ثانيا: التقسيم من الخارج



فى الشكل المقابل: إذا كانت ج ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، ج ∉ $\overline{أب}$

بحيث: $\frac{أج}{جب} = \frac{م_١}{م_٢}$

فإن النقطة ج تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة $م_١ : م_٢$

و نوجد إحداثى نقطة ج (س ، ص) من العلاقتين

س = $\frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ + م_٢}$ ، ص = $\frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}$

أمثـــــــلة

$\boxed{١}$ أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٥ حيث: أ(١ ، −٣) ، ب(٤ ، ٣)

الحـــــــــــــل

$م_١$ = ٢ ، $م_٢$ = ٥ ، $س_١$ = ١ ، $ص_١$ = −٣ ، $س_٢$ = ٤ ، $ص_٢$ = ٣

س = $\frac{٢ \times ٤ - ٥ \times ١}{٢ - ٥}$ = $\frac{٨ - ٥}{-٣}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = −١ ، ص = $\frac{٢ \times ٣ - ٥ \times -٣}{٢ - ٥}$ = $\frac{٦ + ١٥}{-٣}$ = $\frac{٢١}{-٣}$ = −٧

ج (−١ ، −٧)

[٢] أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٧ : ٢ حيث : أ(−١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٨)

الحـــــــــــــل

$\text{م}_1 = ٧$ ، $\text{م}_2 = ٢$ ، $\text{س}_1 = -١$ ، $\text{ص}_1 = ٣$ ، $\text{س}_2 = ٤$ ، $\text{ص}_2 = ٨$

$$\text{س} = \frac{٧ \times ٤ - ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٢٨ + ٢}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٦ - ٦}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

ج (٦ ، ١٠)

[٣] أوجد إحداثى النقطة ج (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ حيث : أ(٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١)

الحـــــــــــــل

$\text{م}_1 = ٣$ ، $\text{م}_2 = ٢$ ، $\text{س}_1 = ٢$ ، $\text{ص}_1 = ٥$ ، $\text{س}_2 = ٧$ ، $\text{ص}_2 = -١$

$$\text{س} = \frac{٣ \times ٧ - ٢ \times ٢}{٣ - ٢} = \frac{٢١ - ٤}{١} = ١٧ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{٣ \times -١ - ٢ \times ٥}{٣ - ٢} = \frac{-٣ - ١٠}{١} = -١٣$$

ج (١٧ ، − ١٣)

مُـــــلاحظه هامة جدا

لإيجاد نسبة التقسيم و معرفة نوعه (من الداخل ، من الخارج) نستخدم إحدى العلاقتين :

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \text{س}_2 + \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{م}_1 \text{ص}_2 + \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

ثم نوجد النسبة بين م_1، م_2 ($\text{م}_1 : \text{م}_2$)

فإذا كانت النسبة موجبة كان التقسيم من الداخل و إذا كانت النسبة سالبة كان التقسيم من الخارج

[٤] إذا كانت : أ (−١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٧) ، ج (س ، ٤) حيث النقاط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أب}}$ بالنقطة ج مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحـــــــــــــل

س = ؟ ، ص = ٤ ، $\text{س}_1 = -١$ ، $\text{ص}_1 = ٢$ ، $\text{س}_2 = ٤$ ، $\text{ص}_2 = ٧$

$$٤ = \frac{\text{م}_1 \times ٧ + \text{م}_2 \times ٢}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \quad \Leftarrow \quad ٤\text{م}_1 + ٤\text{م}_2 = ٧\text{م}_1 + ٢\text{م}_2$$

$$٤\text{م}_1 - ٧\text{م}_1 = ٢\text{م}_2 - ٤\text{م}_2 \quad \Leftarrow \quad -٣\text{م}_1 = -٢\text{م}_2$$

$\therefore \text{م}_1 : \text{م}_2 = ٢ : ٣$ و التقسيم من الداخل

$$\text{س} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

[٥] إذا كانت: أ (٦ ، −٢) ، ب (٢ ، ١) ، ج (−٣ ، ٤) حيث النقاط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أج}$ بالنقطة ب مبينا نوع التقسيم

الحــــــــــــل

س = ٢ ، ص = ١ ، $س_١$ = ٦ ، $ص_١$ = −٢ ، $س_٢$ = −٣ ، $ص_٢$ = ٤

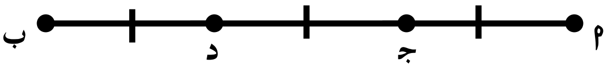
$$٢ = \frac{م_١ \times -٣ + م_٢ \times ٦}{م_١ + م_٢} \Leftarrow ٢م_١ + ٢م_٢ = -٣م_١ + ٦م_٢$$

$$٢م_١ + ٣م_١ = ٦م_٢ - ٢م_٢ \Leftarrow ٥م_١ = ٤م_٢$$

∴ $م_١ : م_٢$ = ٤ : ٥ **و التقسيم من الداخل**

[٦] إذا كانت: أ (−١ ، ١) ، ب (٢ ، ٧) أوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{أب}$ من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحــــــــــــل



النقطة ج تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل

$م_١$ = ١ ، $م_٢$ = ٢ ، $س_١$ = −١ ، $ص_١$ = ١ ، $س_٢$ = ٢ ، $ص_٢$ = ٧

$$س = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times -١}{١ + ٢} = \frac{٢ - ٢}{٣} = ٠ \quad ، \quad ص = \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٧ + ٢}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

∴ ج (٠ ، ٣)

النقطة د تنصف $\overline{جب}$

$$∴ د = \left(\frac{٠ + ٢}{٢} ، \frac{٣ + ٧}{٢} \right) = (١ ، ٥)$$

مــــــــــلاحظات هامة

[١] لإيجاد نسبة تقسيم محورى الإحداثيات لقطعة مستقيمة :

① نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور السينات [نقطة التقاطع (٠ ، ص)] نستخدم العلاقة :

$م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١$ = صفر

② نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور الصادات [نقطة التقاطع (س ، ٠)] نستخدم العلاقة :

$م_١ س_٢ + م_٢ س_١$ = صفر

[٢] إحداثى نقطة تقاطع متوسطات أى مثلث أ ب ج حيث :

أ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، ج ($س_٣$ ، $ص_٣$)

$$\text{هى} : \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right)$$

[٧] إذا كانت : أ(٢ ، −٤) ، ب(٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بواسطة محورى الإحداثيات

الحـــــــــــــــل

نفرض نقطة جـ هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور السينات (س ، ٠)

∴ صفر = $م_١$ × ٥ + $م_٢$ × −٤ = ٥ $م_١$ − ٤ $م_٢$ ⇐ ٥ $م_١$ = ٤ $م_٢$ ⇐ $م_١$: $م_٢$ = ٤ : ٥ من الداخل

نفرض نقطة د هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور الصادات (٠ ، ص)

∴ صفر = $م_١$ × ٣ + $م_٢$ × ٢ = ٣$م_١$ + ٢$م_٢$ ⇐ ٣$م_١$ = −٢$م_٢$ ⇐ $م_١$: $م_٢$ = −٢ : ٣ من الخارج

[٨] إذا كانت : أ(٢ ، ٣) ، ب(−٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بنقطة تقاطعها مع محور الصادات مبينا نوع التقسيم

الحـــــــــــــــل

نفرض نقطة د هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور الصادات (٠ ، ص)

∴ صفر = $م_١$ × −٣ + $م_٢$ × ٢ = −٣$م_١$ + ٢$م_٢$ ⇐ ٣$م_١$ = ٢$م_٢$ ⇐ $م_١$: $م_٢$ = ٢ : ٣ من الداخل

[٩] ∆ أب جـ فيه : أ(٦ ، ٨) ، ب(١ ، ٣) ، جـ(٥ ، ١) أوجد إحداثى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

الحـــــــــــــــل

نقطة تقاطع متوسطات المثلث = ($\frac{٦ + ١ + ٥}{٣}$ ، $\frac{٨ + ٣ + ١}{٣}$) = ($\frac{١٢}{٣}$ ، $\frac{١٢}{٣}$) = (٤ ، ٤)

(١٠) إذا كانت د (٢ ، −١) هى نقطة تقاطع متوسطات ∆ أب جـ حيث : أ(٥ ، −٤) ، ب(−٣ ، ٢) فأوجد إحداثى نقطة جـ

الحـــــــــــــــل

نفرض نقطة جـ (س ، ص)

(٢ ، −١) = ($\frac{٥ − ٣ + س}{٣}$ ، $\frac{−٤ + ٢ + ص}{٣}$)

∴ $\frac{٥ − ٣ + س}{٣}$ = ٢ ⇐ ٥ − ٣ + س = ٦ ⇐ س = ٦ − ٢ = ٤

∴ $\frac{−٤ + ٢ + ص}{٣}$ = −١ ⇐ −٤ + ٢ + ص = −٣ ⇐ ص = −٣ + ٢ = −١

∴ جـ (٤ ، −١)

تدريـــــــب

① أوجد إحداثى نقطة أ التى تقع عند ربع المسافة من النقطة ب (٧ ، −٤) الى النقطة جـ (−١ ، ٠)

② إذا كانت : جـ ∈ $\overline{أب}$ ، بعد جـ عن أ ضعف بعدها عن ب حيث : أ(٦ ، ٤) ، ب(٩ ، ٧) فأوجد إحداثى جـ

مُعادلة الخط المستقيم

طرق إيجاد ميل الخط المستقيم :-

① **ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين :** ٩($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

② **إذا كان متجه الخط المستقيم** (٩ ، ب) **فإن : الميل** = $\frac{ب}{٩}$

فمثـــلا : $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٢ ، ٣) **فإن : الميل** = $\frac{٣}{٢}$

③ **إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة :** ص = م س + جـ **فإن : الميل** = م

④ **إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة :** ٩س + ب ص + جـ = صفر **فإن : الميل** = $-\frac{٩}{ب}$

⑤ **ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها** هـ **فإن : الميل** = ظا هـ

⑥ **ميل المستقيم الموازى لمحور السينات** = صفر **متجه الموضع** = (٩ ، ب) = (١ ، ٠)

⑦ **ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات** = غير معرف **متجه الموضع** = (٩ ، ب) = (٠ ، ١)

مُـــــــلاحظات هامة

$\boxed{١}$ **إذا كان المستقيمان متوازيان فإن :** $م_١ = م_٢$

$\boxed{٢}$ **إذا كان المستقيمان متعامدان فإن :** $م_١ \times م_٢ = -١$

$\boxed{٣}$ **إذا كان ثلاث نقاط** ٩ ، ب ، جـ **على استقامة واحدة فإن : الميل بين** ٩ ، ب **= الميل بين** ب ، جـ **و العكس صحيح**

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

$\boxed{١}$ **المعادلة المتجهة :** $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ى} + ك\,\overleftarrow{ى}$ **حيث :** $\overleftarrow{ى}$ **متجه الموضع**

∴ (س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (٩ ، ب)

$\boxed{٢}$ **المعادلتين الوسيطتين :**

$س_١ = س_١ + ك\,٩$ ، $ص = ص_١ + ك\,ب$

$\boxed{٣}$ **المعادلة المتماثلة (الإحداثية) :- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة** ($س_١$ ، $ص_١$) **و ميله** = م

هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_٢} = م$ أو ($ص - ص_١$) = م ($س - س_١$)

أو $\frac{ص - ص_١}{س - س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_٢}$

$\boxed{٤}$ **الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم :** ٩س + ب ص + جـ = صفر

$\boxed{٥}$ **معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (٩ ، ٠) و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)**

تكون على الصورة : $\frac{س}{٩} + \frac{ص}{ب} = ١$ **(يقطع** ٩ **من محور السينات ، يقطع** ب **من محور السينات)**

٦ المستقيم الموازى لمحور السينات و يمر بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + ك (١ ، ٠)

و تكون المعادلة العامة : ص = ص$_{١}$

٧ المستقيم الموازى لمحور الصادات و يمر بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + ك (٠ ، ١)

و تكون المعادلة العامة : س = س$_{١}$

٨ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١) **و تكون المعادلة العامة :** ص = م س

٩ فى المعادلة : م س + ب ص + جـ = صفر

لإيجاد طول الجزء المقطوع من محور السينات نضع : ص = ٠

لإيجاد طول الجزء المقطوع من محور الصادات نضع : س = ٠

أمثـــــــــلة

(١) أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) و متجه إتجاهه (١ ، ٢)

الحـــــــــــــــل

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

المعادلتين الوسيطتين : س = ٣ + ك ، ص = ٥ + ٢ك

المعادلة المتماثلة : المستقيم مار بالنقطة (٣ ، ٥) ، **الميل** = ب / م = ٢ / ١ = ٢

ص − ٥ = ٢(س − ٣) ⇐ ص − ٥ = ٢س − ٦ ⇐ ٢س − ص − ١ = صفر

(٢) أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

الحـــــــــــــــل

الميل = (٤ − ١) / (٦ − ٣) = ٣ / ٣ = ١

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٣ ، ١) + ك (١ ، ١)

المعادلتين الوسيطتين : س = ٣ + ك ، ص = ١ + ك

المعادلة المتماثلة : ∴ ص − ١ = س − ٣ ∴ س − ص − ٢ = صفر

(٣) معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٤ و يقطع من محور الصادات الموجب جزءا طوله يساوى ٣

الحـــــــــــــــل

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ∴ ص − ٣ = ٤(س − ٠)

∴ ص − ٣ = ٤س ∴ ٤س − ص + ٣ = صفر

∴ **المعادلة المتجهة :** (س ، ص) = (٠ ، ٣) + ك (١ ، ٤)

(٤) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٣) و ميله = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــــــــــــل

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (س ١ ، ص ١) + ك (م ، ب)   **لا تنسى أن الميل =** $\frac{ب}{م}$

∴ (س ، ص) = (−١ ، ٣) + ك (٥ ، ٣)

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهة : $\vec{ر}$ = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

الحـــــــــــــــل

المستقيم يمر بالنقطة : (−٧ ، ٥)   **و الميل =** $\frac{٣}{-٢}$

المعادلة المتماثلة للمستقيم : ص − ٥ = $\frac{٣}{-٢}$ (س + ٧)

∴ −٢ص + ١٠ = ٣س + ٢١   ∴ ٣س + ٢ص + ١١ = صفر

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٣) و يوازى المستقيم الذى معادلته : ٤س − ٧ص + ٣ = صفر

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-م}{ب}$ = $\frac{-٤}{-٧}$ = $\frac{٤}{٧}$

المعادلة المتماثلة : ص − ٣ = $\frac{٤}{٧}$ (س + ٢)

٧ص − ٢١ = ٤س + ٨

٤س − ٧ص + ٢٩ = صفر

و تكون المعادلة المتجهة على الصورة : (س ، ص) = (−٢ ، ٣) + ك (٧ ، ٤)

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) و عمودى على المستقيم الذى معادلته : ٥س + ٧ص = ١

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{٧}$

∴ **الميل المطلوب =** $\frac{٧}{٥}$

∴ **المعادلة المطلوبة :** ص − ٤ = $\frac{٧}{٥}$ (س − ٣)

∴ ٥ص − ٢٠ = ٧س − ٢١

∴ ٧س − ٥ص − ١ = صفر

المعادلة المتحهة : (س ، ص) = (٣ ، ٤) + ك (٥ ، ٧)

(٨) أوجد المعادلتين الوسيطتين للمستقيم المار بالنقطة (١ ، −٤)و يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤،٥)

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{٥ - ٣}{٤ - ١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ **متجه الموضع =** (٣ ، ٢)

المعادلة المتحهة : (س ، ص) = (١ ، −٤) + ك (٣ ، ٢)

المعادلتين الوسيطتين : س = ١ + ٣ك   ،   ص = −٤ + ٢ك

(٩) أوجد المعادلتين الوسيطتين للمستقيم المار بالنقطة (−٢، −٤) و عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــــــــــــــــــل

الميل = $\frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ ∴ الميل المطلوب = $-\frac{٤}{٣}$

المعادلة : ص − ٢ = $-\frac{٤}{٣}$ (س + ١) ∴ −٣ص + ٦ = ٤س + ٤

∴ ٤س + ٣ص − ٢ = صفر

(١٠) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الإتجاه الموجب لمحور السينات و ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

الحـــــــــــــــــــــل

∵ ٩ = ٣ ، ب = −٤ ∴ $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٤}$ = صفر

(١١) أوجد المقطوعتين السينية و الصادية للمستقيم الذى معادلته : ٢س − ٥ص = ١٠

الحـــــــــــــــــــــل

لإيجاد المقطوعة السينية : نضع ص = صفر ∴ ٢س = ١٠ ∴ س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

∴ المقطوعة السينية = ٥ نقطة التقاطع مع محور السينات (٥ ، ٠)

لإيجاد المقطوعة الصادية : نضع س = صفر ∴ −٥ص = ١٠ ∴ ص = $\frac{١٠}{-٥}$ = −٢

∴ المقطوعة الصادية = −٢ نقطة التقاطع مع محور الادات سينات (٠ ، −٢)

(١٢) إذا كانت النقطة (٩ ، ٣) تنتمى للمستقيم : ٢س + ٥ص − ١٧ = صفر فأوجد قيمة ٩

الحـــــــــــــــــــــل

٢٩ + ٥ × ٣ − ١٧ = صفر ⇐ ٢٩ + ١٥ − ١٧ = صفر ⇐ ٢٩ = ٢ ⇐ ٩ = ١

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) و يوازى محور السينات

الحـــــــــــــــــــــل

∵ المستقيم يوازى محور السينات ∴ الميل = صفر ∴ المعادلة : ص = ٣

(١٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) و يوازى محور الصادات

الحـــــــــــــــــــــل

∵ المستقيم يوازى محور الصادات ∴ الميل = غير معرف ∴ المعادلة : س = ٢

(١٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم : ٣س − ٢ص + ١١ = صفر على التعامد عند س = ١

الحـــــــــــل

بالتعويض عند : س = ١ ∴ ٣ − ٢ص + ١١ = ٠ ∴ −٢ص = − ١٤ ∴ ص = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧

∴ نقطة التقاطع على التعامد هى : (١ ، ٧) (وهى كذلك النقطة التى يمر بها المستقيم المطلوب)

الميل = − $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ الميل المطلوب = − $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص − ٧ = − $\frac{٢}{٣}$ (س − ١) ∴ −٣ص + ٢١ = ٢س − ٢

∴ ٢س + ٣ص − ٢٣ = صفر

(١٦) إذا كان : أ = (−٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد معادلة محور تماثل $\overline{\text{أب}}$

الحـــــــــــل

نعلم أن : محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

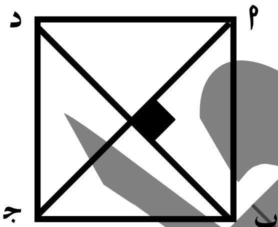
نقطة منتصف القطعة المستقيمة = ($\frac{-٣ + ٥}{٢}$ ، $\frac{١ + ٧}{٢}$) = (١ ، ٤)

الميل = $\frac{٧ - ١}{٥ + ٣}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ الميل المطلوب = − $\frac{٤}{٣}$

المعادلة : ص − ٤ = − $\frac{٤}{٣}$ (س − ١) ∴ −٣ص + ١٢ = ٤س − ٤

∴ ٤س + ٣ص − ١٦ = صفر

(١٧) إذا كان $\overline{\text{أجـ}}$ قطر فى المربع أ ب جـ د حيث أ = (٣ ، ٥) ، جـ = (−١ ، −١) أوجد معادلة القطر $\overline{\text{ب د}}$



الحـــــــــــل

نعلم أن فى المربع : القطران ينصف كلا منهما الآخر ، القطران متعامدان

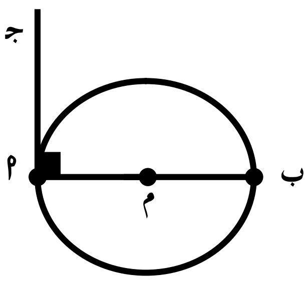
منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{ب د}}$ = ($\frac{٣ - ١}{٢}$ ، $\frac{٥ - ١}{٢}$) = (١ ، ٢)

الميل = $\frac{-١ - ٥}{-١ - ٣}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ الميل المطلوب = − $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص − ٢ = − $\frac{٢}{٣}$ (س − ١) ∴ −٣ص + ٦ = ٢س − ٢

∴ ٢س + ٣ص − ٨ = صفر

(١٨) إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة م حيث أ (−٤ ، ١) ، ب (−٢ ، ٤) أوجد معادلة المماس للدائرة م عند أ



الحـــــــــــل

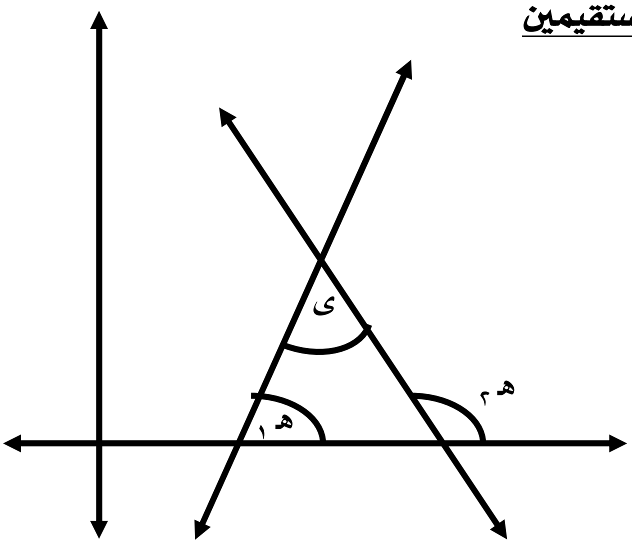
نعلم أن فى الدائرة : المماس يكون عموديا على نصف القطر

الميل = $\frac{٤ - ١}{-٢ + ٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ الميل المطلوب = − $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص − ١ = − $\frac{٢}{٣}$ (س + ٤) ∴ −٣ص + ٣ = ٢س + ٨

∴ ٢س + ٣ص + ٥ = صفر

الزاوية الحادة بين مستقيمين



المستقيمان اللذان ميلاهما : م١ ، م٢ **و يحصران بينهما زاوية**

قياسها ى **فإن :** ى **تتعين من العلاقة**

$$\text{ظا ى} = \left| \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2} \right|$$

حيث : م١ = ظا هـ١ ، م٢ = ظا هـ٢

مـــــــلاحظات :-

① **إذا كان :** م١ = م٢ **أى أن : المستقيمان متوازيان**

فإن : ق∠ى = صفر° **أ،** ق∠ى = ١٨٠°

② **إذا كان :** م١ م٢ = −١ **أى أن : المستقيمان متعامدان** **فإن :** ق∠ى = ٩٠°

أمثـــــــلة

١ **أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين :** ٣س − ص = ٥ ، ٢س + ص − ٧ = صفر

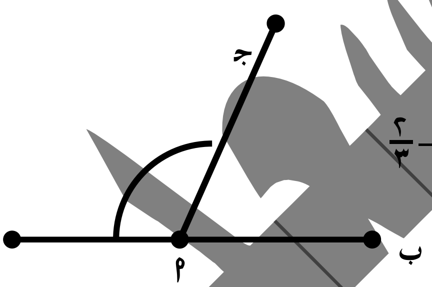
الحـــــــــــــــل

$$\text{م}_1 = \frac{3}{1} = 3 \qquad ، \qquad \text{م}_2 = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\therefore \text{ظا ى} = \left| \frac{3 + 2}{1 + 3 \times -2} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = |-1| = 1 \qquad \therefore \text{ق} \angle \text{ى} = 45^\circ$$

٢ **إذا كان :** أ(١ ، ٤) ، ب(٢ ، ١) ، جـ(٤ ، ٢) **أوجد** ق∠ب أ جـ **المنفرجة**

الحـــــــــــــــل



$$\text{م}_1 = \text{ميل } \overline{\text{أب}} = \frac{1-4}{2-1} = -3 \qquad ، \qquad \text{م}_2 = \text{ميل } \overline{\text{أجـ}} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ظا ى} = \left| \frac{-3 + \frac{2}{3}}{1 - 3 \times -\frac{2}{3}} \right| = \left| \frac{-9 + 2}{9} \right| = \left| \frac{-7}{9} \right| = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \text{ق} \angle \text{ب أ جـ} = 37^\circ\ 52'$$

$$\therefore \text{ق} \angle \text{ب أ جـ المنفرجة} = 180 - (37^\circ\ 52') = 143^\circ\ 8'$$

٣ **أوجد قياس الزاوية بين المستقيم :** ٣س − ٢ص + ١ = ٠ **و المستقيم الذى متجه إتجاهه** (٥ ، ١)

الحـــــــــــــــل

$$\text{م}_1 = \frac{3}{2} \qquad ، \qquad \text{م}_2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{ظا ى} = \left| \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{5}} \right| = \left| \frac{15 - 2}{10 + 3} \right| = \left| \frac{13}{13} \right| = 1 \qquad \therefore \text{ق} \angle \text{ى} = 45^\circ$$

$\boxed{٤}$ **إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل المستقيم الأول = ٢ أوجد ميل الثانى**

الحـــــــــــل

ظا ى = ظا ٤٥° = ١ ، $\text{م}_١ = ٢$ ، $\text{م}_٢ = ؟$

$$\therefore ١ = \left|\frac{٢ - \text{م}_٢}{١ + ٢\text{م}_٢}\right| \quad \therefore ١ + ٢\text{م}_٢ = ٢ - \text{م}_٢ \quad \therefore ٢\text{م}_٢ + \text{م}_٢ = ٢ - ١$$

$$\therefore ٣\text{م}_٢ = ١ \quad \Leftarrow \quad \text{م}_٢ = \frac{١}{٣}$$

$\boxed{٥}$ **إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين :** س − ك ص + ٢ = ٠ ، س − ٣ص + ٤ = ٠ **تساوى ٤٥° فأوجد ك**

الحـــــــــــل

ظا ى = ظا ٤٥° = ١ ، $\text{م}_١ = \frac{١}{\text{ك}}$ ، $\text{م}_٢ = \frac{١}{٣}$

$$\therefore ١ = \left|\frac{\frac{١}{\text{ك}} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{١}{\text{ك}} \times \frac{١}{٣}}\right| = \frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} \quad \therefore ٣\text{ك} + ١ = ٣ - \text{ك} \quad \therefore ٤\text{ك} = ٢$$

$$\therefore \text{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$\boxed{٦}$ **أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) و يصنع مع الخط المستقيم :** $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، −٣) **زاوية ظلها** $\frac{٣}{٢}$

الحـــــــــــل

نفرض ميل المستقيم المطلوب : م ، $\text{م}_٢ = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = -\frac{٣}{٢}$

$$\frac{٣}{٢} = \left|\frac{\text{م} + \frac{٣}{٢}}{١ - \frac{٣}{٢}\text{م}}\right| \quad \therefore ٣\left(١ - \frac{٣}{٢}\text{م}\right) = ٢\left(\text{م} + \frac{٣}{٢}\right)$$

$$\therefore ٣ - \frac{٩}{٢}\text{م} = ٢\text{م} + ٣ \quad \therefore \text{م} = \text{صفر}$$

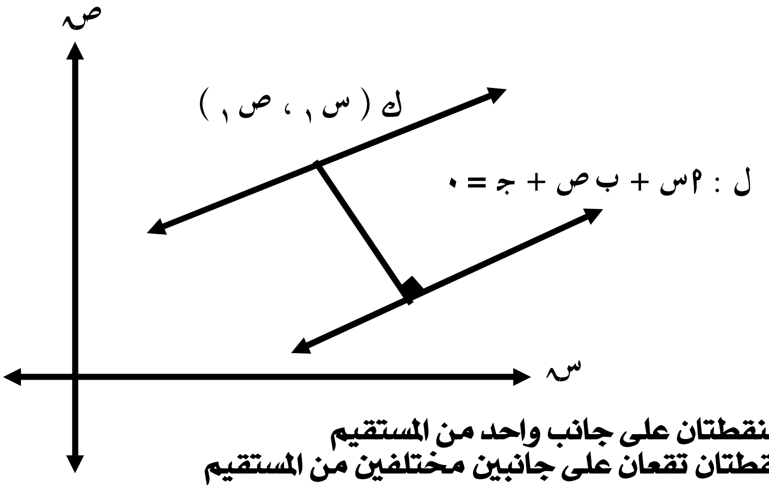
∴ **معادلة المستقيم :** ص − ٥ = ٠ (س − ٣) ⇐ ص = ٥

تدريـــــــب :

أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته : س + ٣ص + ٢ = صفر ،

و المستقيم : (س ، ص) = (٣ ، ٢) + ك (١ ، ٢)

طول العمود من نقطة الى خط مستقيم



طول العمود النازل من النقطة ك (س ١ ، ص ١)

على المستقيم : ٩س + ب ص + ج = ٠

يعطى من العلاقة :

$$\text{ل} = \frac{|\text{٩س}_{\text{١}} + \text{ب ص}_{\text{١}} + \text{ج}|}{\sqrt{\text{٩}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}}$$

مــــــــلاحظات :-

① **إذا كان المقدار :** ٩س ١ + ب ص ١ + ج
لنقطتين مختلفتين بنفس الإشارة تكون هاتان النقطتان على جانب واحد من المستقيم
بينما إذا كان لهما إشارتين مختلفتين كانتا النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم

② **إذا كان المقدار :** ٩س ١ + ب ص ١ + ج **يساوى صفر فإن النقطة تقع على المستقيم**

أمثـــــــــلة

$\boxed{\text{١}}$ **أوجد طول العمود الساقط من النقطة** (−٢ ، ٥) **على المستقيم :** ٣س + ٤ص + ٦ = صفر

الحـــــــــــــل

$$\text{ل} = \frac{|\text{−٢} \times \text{٣} + \text{٥} \times \text{٤} + \text{٦}|}{\sqrt{\text{٩} + \text{١٦}}} = \frac{|\text{−٦} + \text{٢٠} + \text{٦}|}{\sqrt{\text{٢٥}}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٥}} = \text{٤}$$ **وحدة طول**

$\boxed{\text{٢}}$ **أوجد طول العمود الساقط من النقطة** (٢ ، −٣) **على المستقيم :** ٨س −٦ص + ١٣ = صفر

الحـــــــــــــل

$$\text{ل} = \frac{|\text{٢} \times \text{٨} - \text{٣} \times \text{−٦} + \text{١٣}|}{\sqrt{\text{٦٤} + \text{٣٦}}} = \frac{|\text{١٦} + \text{١٨} + \text{١٣}|}{\sqrt{\text{١٠٠}}} = \frac{\text{٤٧}}{\text{١٠}} = \text{٤,٧}$$ **وحدة طول**

$\boxed{\text{٣}}$ **أوجد طول العمود الساقط من النقطة** (٢ ، ١) **على المستقيم :** ر = (٤ ، ٢) + ك (−٣ ، ٤)

الحـــــــــــــل

ميل المستقيم = $-\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ **و يمر المستقيم بالنقطة** (٤ ، ٢)

معادلة المستقيم : ص − ٢ = $-\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ (س − ٤) ∴ ٤س + ٣ص − ٢٢ = صفر

$$\text{ل} = \frac{|\text{٢} \times \text{٤} + \text{١} \times \text{٣} - \text{٢٢}|}{\sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}} = \frac{|\text{٨} + \text{٣} - \text{٢٢}|}{\sqrt{\text{٢٥}}} = \frac{\text{١١}}{\text{٥}} = \text{٢,٢}$$ **وحدة طول**

$\boxed{\text{٤}}$ **أثبت أن المستقيمان :** ٣س + ٤ص − ٨ = ٠ ، ر = (٥ ، −٣) + ك (٨ ، −٦) **متوازيان و أوجد البعد بينهما**

الحـــــــــــــل

م ١ = $-\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ م ٢ = $-\frac{\text{٦}}{\text{٨}} = -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ∵ م ١ = م ٢ ∴ **المستقيمان متوازيان**

نوجد البعد بين النقطة (٥ ، −٣) **و المستقيم :** ٣س + ٤ص − ٨ = ٠

$$\text{ل} = \frac{|\text{٥} \times \text{٣} - \text{٣} \times \text{٤} - \text{٨}|}{\sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}} = \frac{|\text{١٥} - \text{١٢} - \text{٨}|}{\sqrt{\text{٢٥}}} = \frac{\text{٥}}{\text{٥}} = \text{١}$$ **وحدة طول**

٥ إذا كان طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستقيم : ٤س − ٣ص + ك = ٠
يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحـــــــــــــــل

$٣ = \frac{|٠ \times ٤ + ٠ \times -٣ + ك|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|ك|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{ك}{٥}$ ∴ ك = ٣ × ٥ = ١٥

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، −٣) و المستقيم : ١٢س − ٥ص −١ = ٠ مماس لها و اوجد محيطها و مساحتها

الحـــــــــــــــل

نصف قطر الدائرة = البعد العمودى بين مركز الدائرة و المستقيم المماس لها

$نق = \frac{|١ \times ١٢ - ٣ \times -٥ - ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}} = \frac{|١٢ + ١٥ - ١|}{\sqrt{١٦٩}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$ **وحدة طول**

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٢ × π = ٤π **وحدة طول**
مساحة الدائرة = π نق^٢ = π (٢)^٢ = ٤π **وحدة مساحة**

٧ أثبت أن المستقيم : ٤س + ٣ص + ٢ = صفر يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) و طول نصف قطرها ٤سم

الحـــــــــــــــل

$ل = \frac{|٣ \times ٤ + ٢ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|١٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ **وحدة طول**

∵ ل = نق ∴ **المستقيم** : ٤س + ٣ص + ٢ = صفر **يمس الدائرة التى مركزها** (٣ ، ٢)

٨ أثبت أن النقط : أ(٣ ، ١) ، ب (−٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم : ٣س − ٤ص + ٦ = صفر و على بعدين متساويين منه

الحـــــــــــــــل

بعد النقطة الأولى = $ل_١ = \frac{|٣ \times ٣ + ١ \times -٤ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ **وحدة طول**

بعد النقطة الثانية = $ل_٢ = \frac{|-٣ \times ٣ + ٢ \times -٤ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$
وحدة طول

∵ | أ س$_١$ + ب ص$_١$ + جـ | **عن المستقيم بإشارتين مختلفتين**
∴ **النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم و على بعدين متساويين منه**

تدريب : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $-\frac{٥}{١٢}$ و طول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومتين

إذا كان : ل$_{١}$: أ$_{١}$س + ب$_{١}$ص + جـ$_{١}$ = ٠ ، ل$_{٢}$: أ$_{٢}$س + ب$_{٢}$ص + جـ$_{٢}$ = ٠

فإن : المعادلة التى تمثل المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطعهما هى :

أ$_{١}$س + ب$_{١}$ص + جـ$_{١}$ + ك (أ$_{٢}$س + ب$_{٢}$ص + جـ$_{٢}$) = ٠

حيث : ك عدد ثابت يمكن إيجاده إذا علم نقطة واقعة على المستقيم المعلوم أو ميله أو ميل المستقيم الموازى له أو المستقيم العمودى عليه .... إلخ

أمثـــــــــــلة

١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣س + ٢ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ص − ٧ = ٠ و مارا بالنقطة (٣ ، ١)

الحـــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

٣س + ٢ص = ٧

س + ٣ص = ٧ ×٣

٣س + ٢ص = ٧

٣س + ٩ص = ٢١

بالطرح

− ٧ص = −١٤

∴ ص = ٢

∴ س + ٦ = ٧

∴ س = ٧ − ٦ = ١

∴ **نقطة تقاطع المستقيمين** (١ ، ٢)

∴ **معادلة المستقيم المار بالنقطتين** (١ ، ٢) ، (٣ ، ١)

∴ **الميل** = $\frac{٢ - ١}{١ - ٣}$ = −$\frac{١}{٢}$

∴ **معادلة المستقيم :** ص − ٢ = −$\frac{١}{٢}$ (س − ١)

س + ٢ص − ٥ = صفر

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ص = ١١ ، ر = (٧ ، ١) + ك (١ ، −١)
و يوازى المستقيم : ٤س − ٧ص + ١ = صفر

الحـــــــــــل

معادلة المستقيم الثانى :

الميل = −١

ص − ١ = − (س − ٧)

س + ص − ٨ = ٠

نحل معادلتى المستقيمين

٢س + ص = ١١

س + ص = ٨

بالطرح

س = ٣

بالتعويض : ٣ + ص = ٨ ⟸ ص = ٨−٣ = ٥

∴ **المستقيم يمر بالنقطة** (٣ ، ٥)

الميل = $\frac{٤}{٧}$

معادلة المستقيم :

ص − ٥ = $\frac{٤}{٧}$ (س − ٣)

∴ ٧ص − ٣٥ = ٤س − ١٢

∴ ٤س − ٧ص + ٢٣ = صفر

٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ص = ١١ ، س – ص = ١
وعمودى على المستقيم : ٣س – ٥ص + ١ = صفر

الحـــــــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

٢س + ص = ١١

س – ص = ١

بالجمع

٣س = ١٢

س = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

٤ – ص = ١ ⇐ ص = ٤–١ =٣

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٤ ، ٣)

الميل = $\frac{٣}{٥}$ ∴ الميل المطلوب = – $\frac{٥}{٣}$

∴ معادلة المستقيم :

ص – ٣ = – $\frac{٥}{٣}$ (س – ٤)

–٣ص + ٩ = ٥س – ٢٠

٥س + ٣ص – ٢٩ = صفر

٤ أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٥ ، س – ص = ١
على المستقيم : ٨س + ٦ص + ٥ = صفر

الحـــــــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

س + ص = ٥

س – ص = ١

بالجمع

٢س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∴ ٣ + ص = ٥

∴ ص = ٥ – ٣ = ٢

∴ نقطة التقاطع (٣ ، ٢)

طول العمود = $\frac{| ٣ \times ٨ + ٢ \times ٦ + ٥ |}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$ = $\frac{| ٢٤ + ١٢ + ٥ |}{\sqrt{١٠٠}}$ = (= $\frac{٤١}{١٠}$ = ٤,١ وحدة طول

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٤ و يمر بنقطة الأصل

الحـــــــــــــــل

نقطة تقاطع المستقيمين هى : (٣ ، ٤)

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل

∴ معادلة المستقيم : ص = م س

الميل = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المستقيم : ص = $\frac{٤}{٣}$ س

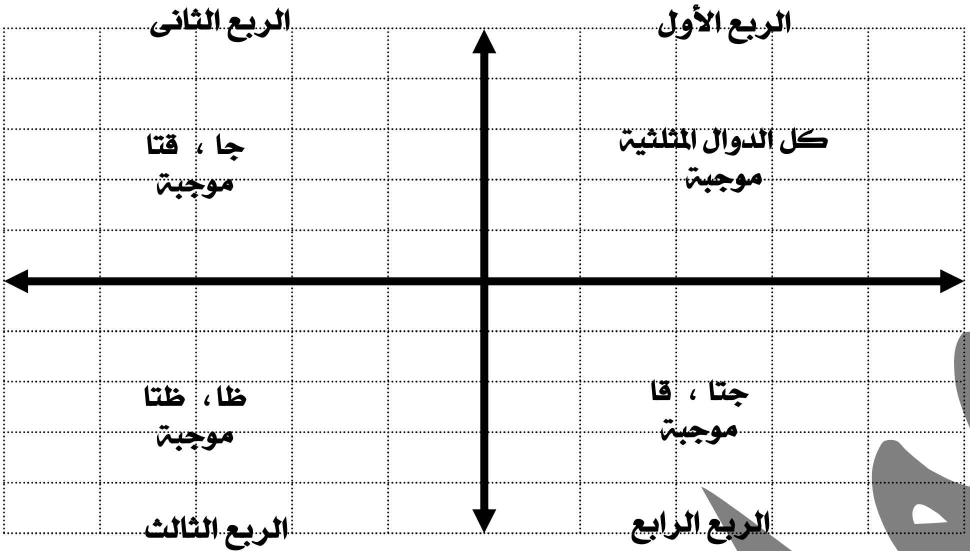
تدريـــــــب

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣س – ٤ص + ١= ٠ ، ٥س + ص – ١ = ٠
و يقطع جزأين متساويين من المحورين الموجبين .

حســــاب المثلثــات

مــــــراجعة على ما سبق دراسته

① إشارة الدالة



لا تنسى أن :

كل جبار ظالم جتا داهية

② الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٠ أ، ٣٦٠
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	صفر	−١	صفر
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	−١	صفر	١
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

③ بعض خواص الدوال المثلثية

١ جا (٩٠ − هـ) = جتا هـ ، جتا (٩٠ − هـ) = جا هـ ، ظا (٩٠ − هـ) = ظتا هـ

٢ **إذا كان :** جاس = جتا ص **فإن :** س + ص = ٩٠°

٣ جا (١٨٠ − هـ) = جا هـ ، جتا (١٨٠ − هـ) = − جتا هـ ، ظا (١٨٠ − هـ) = − ظا هـ

٤ جا (١٨٠ + هـ) = − جا هـ ، جتا (١٨٠ + هـ) = − جتا هـ ، ظا (١٨٠ + هـ) = ظا هـ

٥ جا (٢٧٠ − هـ) = −جتا هـ ، جتا (٢٧٠ − هـ) = − جا هـ ، ظا (٢٧٠ − هـ) = ظتا هـ

٦ جا (٢٧٠ + هـ) = −جتا هـ ، جتا (٢٧٠ + هـ) = جا هـ ، ظا (٢٧٠ + هـ) = − ظتا هـ

٧ جا (٣٦٠ − هـ) = − جا هـ ، جتا (٣٦٠ − هـ) = جتا هـ ، ظا (٣٦٠ − هـ) = − ظا هـ

٨ جا (− هـ) = − جا هـ ، جتا (− هـ) = جتا هـ ، ظا (− هـ) = − ظا هـ

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

لأى زاوية هـ كون :-

[١] جا هـ قتا هـ = ١ أ، جا هـ = $\frac{١}{\text{قتا هـ}}$ أ، قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

[٢] جتا هـ قا هـ = ١ أ، جتا هـ = $\frac{١}{\text{قا هـ}}$ أ، قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

[٣] ظا هـ ظتا هـ = ١ أ، ظا هـ = $\frac{١}{\text{ظتا هـ}}$ أ، ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$

[٤] ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ أ، ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

[٥] جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١ أ، ١ + ظا^{٢}هـ = قا^{٢}هـ أ، ١ + ظتا^{٢}هـ = قتا^{٢}هـ

تدريـــــب

أكمـــــل مايلى :_

(١) ١ – جا^{٢}س = ………… (٢) قا^{٢}س – ظا^{٢}س = ………… (٣) جاس قاس = ………………

(٤) ظاس قتاس = ………… (٥) جا^{٢}٣س + ……. = ١ (٦) جا^{٢}٤٣ + جتا^٢……. = ١

(٧) ١ + ظا^{٢}س = قتا^٢ …….. (٨) جا^{٢}س + جتا^{٢}س + ظا^{٢}س = …………

(٩) (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^٢ = ……………………

أمثـــــلة

① أثبت صحة المتطابقة التالية : (جاس + جتاس)^٢ –٢جاس جتاس = ١

الحـــــــل

(جاس + جتاس)^٢ –٢جاس جتاس = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س – ٢جاس جتاس = جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

② أثبت صحة المتطابقة التالية : (جاس + جتاس)^٢ – ١ = ٢جاس جتاس

الحـــــــل

(جاس + جتاس)^٢ –١ = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س–١ = (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) + ٢جاس جتاس –١

= ١ + ٢جاس جتاس –١ = ٢جاس جتاس

③ أثبت صحة المتطابقة التالية : ظاس + ظتاس = قاس قتاس

الحـــــــل

ظاس + ظتاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ + $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = $\frac{\text{جا}^٢\text{س + جتا}^٢\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ = $\frac{١}{\text{جاس جتاس}}$ = $\frac{١}{\text{جا س}}$ × $\frac{١}{\text{جتا س}}$ = قاس قتاس

④ أثبت صحة المتطابقة التالية : قا^{٢}س + قتا^{٢}س = قا^{٢}س قتا^{٢}س

الحـــــــل

قا^{٢}س + قتا^{٢}س = $\frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ + $\frac{١}{\text{جا}^٢\text{س}}$ = $\frac{\text{جا}^٢\text{س + جتا}^٢\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س جتا}^٢\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جا}^٢\text{س جتا}^٢\text{س}}$ = قا^{٢}س قتا^{٢}س

⑤ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}$ = ٢جاس جتاس

الحـــــــــــــــل

$\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{٢ظاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{٢جاس}}{\text{جتاس}} \div \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{٢جاس}}{\text{جتاس}} \times \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{٢جاس جتاس}$

⑥ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{س}}$ = ظا^{٢}س

الحـــــــــــــــل

$\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \div \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$

⑦ أثبت صحة المتطابقة التالية : جا^{٢}س + جا^{٢}س ظا^{٢}س = ظا^{٢}س

الحـــــــــــــــل

$\text{جا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س = جا}^{٢}\text{س (١ + ظا}^{٢}\text{س) = جا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$

⑧ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\text{١} + \frac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

الحـــــــــــــــل

$\text{١} + \frac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}} = \text{١} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{١ + ظا}^{٢}\text{س = قا}^{٢}\text{س}$

⑨ أثبت صحة المتطابقة التالية : جتا^{٤}س − جا^{٤}س = ١ − ٢جا^{٢}س

الحـــــــــــــــل

الطرف الأيمن = جتا^{٤}س − جا^{٤}س = (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س)

= (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(١) = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

الطرف الأيمن = ١ − ٢جا^{٢}س = (جتا^{٢}س + جا^{٢}س) − ٢جا^{٢}س = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

الطرفان متساويان

(١٠) أثبت صحة المتطابقة التالية : جتا^{٤}س − جا^{٤}س = ٢جتا^{٢}س − ١

الحـــــــــــــــل

الطرف الأيمن = جتا^{٤}س − جا^{٤}س = (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س)

= (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(١) = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

الطرف الأيمن = ٢جتا^{٢}س − ١ = ٢جتا^{٢}س − (جتا^{٢}س + جا^{٢}س) = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

الطرفان متساويان

حل المعادلة المثلثية

المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم قياسات الزوايا التى تحقق هذه المعادلة

مـــــــلاحظات هامة

① جا هـ ∋ [−١ ، ١]   ② جتا هـ ∋ [−١ ، ١]   **لجميع قيم هـ الحقيقية**

خطوات حل المعادلة المثلثية

١ نحدد إشارة الدالة لمعرفة الربع الذى تنتمى إليه

٢ نوجد قياس الزاوية و ليكن (ق∠هـ)

٣ نحدد قياسات الزاوايا كالتالى :

① **الربع الأول : قياس الزاوية** = ق∠هـ

② **الربع الثانى : قياس الزاوية** = ١٨٠ − ق∠هـ

③ **الربع الثالث : قياس الزاوية** = ١٨٠ + ق∠هـ

④ **الربع الرابع : قياس الزاوية** = ٣٦٠ − ق∠هـ

أمثــــــــلة

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جاس − ١ = ٠

الحــــــــل

∵ ٢جاس − ١ = ٠ ⇐ جاس = $\frac{١}{٢}$

ق∠س = ٣٠°

∴ (جاس $>$ ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثانى**

الربع الأول : قياس الزاوية = ٣٠°

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جاس + $\sqrt{٣}$ = ٠

الحــــــــل

∵ ٢جاس + $\sqrt{٣}$ = ٠ ⇐ جاس = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ق∠س = ٦٠°

∴ (جاس $<$ ٠) **تقع فى الربع الثالث أو الرابع**

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∴ م . ح = { ٢٤٠° ، ٣٠٠° }

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٢}$جاس − ١ = ٠

الحــــــــل

∵ $\sqrt{٢}$جاس − ١ = ٠ ⇐ جاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ق∠س = ٤٥°

∴ (جاس $>$ ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثانى**

الربع الأول : قياس الزاوية = ٤٥°

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° }

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جتاس + ١ = ٠

الحــــــــل

∵ ٢جتاس + ١ = ٠ ⇐ جتاس = −$\frac{١}{٢}$

∴ ق∠س = ٦٠°

∴ (جتاس $<$ ٠) **تقع فى الربع الثانى أو الثالث**

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

∴ م . ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠° }

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جتاس − √٣ = ٠

الحـــــــل

∵ ٢ جتاس − √٣ = ٠ ⇐ جتاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ق ∠س = ٣٠°

∴ (جتاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الرابع**

الربع الأول : قياس الزاوية = ٣٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ٣٣٠° }

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة : √٢ جتاس − ١ = ٠

الحـــــــل

∵ √٢ جتاس − ١ = ٠ ⇐ جتاس = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ق ∠س = ٤٥°

∴ (جتاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الرابع**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٤٥°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ + ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ٣١٥° }

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلة : √٣ ظاس + ١ = ٠

الحـــــــل

∵ √٣ ظاس + ١ = ٠ ⇐ ظاس = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ق ∠س = ٣٠°

∴ (ظاس < ٠) **تقع فى الربع الثانى أو الرابع**

الربع الثانى : قياس الزاوية = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∴ م . ح = { ١٥٠° ، ٣٣٠° }

(٨) أوجد مجموعة حل المعادلة : ظاس − √٣ = ٠

الحـــــــل

∵ ظاس − √٣ = ٠ ⇐ ظاس = √٣

∴ ق ∠س = ٦٠°

∴ (ظاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثالث**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٦٠°

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

∴ م . ح = { ٦٠° ، ٢٤٠° }

(٩) أوجد مجموعة حل المعادلة : ظاس + ١ = ٠

الحـــــــل

∵ ظاس + ١ = ٠ ⇐ ظاس = −١

∴ ق ∠س = ٤٥°

∴ (ظاس < ٠) **تقع فى الربع الثانى أو الرابع**

الربع الثانى : قياس الزاوية = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ١٣٥° ، ٣١٥° }

(١٠) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس = ٠,٦٤٤٨

الحـــــــل

∵ جاس = ٠,٦٤٤٨ ⇐

∴ ق ∠س = ٤٠° ٩َ ٢ً

∴ (جاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثانى**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٤٠° ٩َ ٢ً

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٤٠° ٩َ ٢ً = ١٣٨° ٥١َ ٥٢ً

∴ م . ح = { ٤٠° ٩َ ٢ً ، ١٣٨° ٥١َ ٥٢ً }

(١١)) أوجد مجموعة حل المعادلة : جا²س + جاس = ٠

الحـــــــل

∵ جا²س + جاس = ٠ ⇐ جاس (جاس + ١) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جاس = −١

∵ جاس = ٠ ⇐ ق ∠س = صفر° **أ،** ق ∠س = ١٨٠°

∵ جاس = −١ ⇐ ق ∠س = ٢٧٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° }

((١٢)) أوجد مجموعة حل المعادلة : جتا^{٢}س + جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جتا^{٢}س + جتاس = ٠ ⇐ جتاس (جتاس + ١) = ٠ ⇐ جتاس = ٠ أ، جتاس = −١

∵ جتاس = ٠ ⇐ ق ∠س = ٩٠° أ، ق∠س = ٢٧٠°

∵ جتاس = −١ ⇐ ق ∠س = ١٨٠°

∴ م . ح = { ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° }

((١٣)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جا^{٢}س + ٣جاس = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جا^{٢}س + ٣جاس = ٠ ⇐ جاس (٢جاس + ٣) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جتاس = − $\frac{٣}{٢}$ **مرفوض**

∵ جاس = ٠ ⇐ ق ∠س = صفر° أ، ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° }

((١٤)) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جاس جتاس = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جتاس = ٠

∵ جاس = ٠ ⇐ ق ∠س = صفر° أ، ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∵ جتاس = ٠ ⇐ ق ∠س = ٩٠° أ، ق∠س = ٢٧٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° }

((١٥)) أوجد مجموعة حل المعادلة : جا^{٢}س + ٢جاس = ٠

الحـــــــل

∵ جا^{٢}س + ٢جاس = ٠ ⇐ جاس (جاس + ٢) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جاس = −٢ **مرفوض**

∵ جاس = ٠ ⇐ ق ∠س = صفر° أ، ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° }

((١٦)) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس − جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جاس − جتاس = ٠ ⇐ جاس = جتاس ÷ جتاس ⇐ ظاس = ١

∵ ظاس = ١ ⇐ ق ∠س = ٤٥°

تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٤٥° ، **قياس الزاوية فى الربع الثالث** = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ٢٢٥° }

((١٧)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جا^{٢}س + ٥جاس + ٢ = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جا^{٢}س + ٥جاس + ٢ = ٠ ⇐ (٢جاس + ١)(جاس + ٢) = ٠ ⇐ جاس = − $\frac{١}{٢}$ أ، جاس = −٢**مرفوض**

∵ جاس = − $\frac{١}{٢}$ ⇐ ق∠س = ٣٠°

تقع فى الربع الثالث أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الثالث = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

قياس الزاوية فى الربع الرابع = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠° ∴ م . ح = { ٢١٠° ، ٣٣٠° }

((١٨)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جتا^{٢}س − ٣جتاس + ١ = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جتا^{٢}س − ٣جتاس + ١ = ٠ ⇐ (٢جتاس − ١)(جتاس − ١) = ٠

∴ جتاس = $\frac{١}{٢}$ أ، جتاس = ١

∵ جتاس = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ق∠س = ٦٠°

تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٦٠°

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∵ جتاس = ١ ⇐ ق∠س = صفر°

أ، ق∠س = ١٨٠°

∴ م . ح = { ٦٠° ، ٣٠٠° ، صفر° ، ١٨٠° }

((١٩)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جا^{٢}س − ١ = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جا^{٢}س − ١ = ٠ ⇐ جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ جاس = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∵ جاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ ق∠س = ٤٥°

تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٤٥

قياس الزاوية فى الربع الثانى

= ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∵ جاس = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ ق∠س = ٤٥°

تقع فى الربع الثالث أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الثالث = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

((٢٠)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٤جتا^{٢}س − ٣ = ٠

الحـــــــل

∵ ٤جتا^{٢}س − ٣ = ٠ ⇐ جتا^{٢}س = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ جتاس = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⇐ ق∠س = ٣٠°

تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٣٠

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∵ جتاس = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⇐ ق∠س = ٣٠°

تقع فى الربع الثانى أو الربع الثالث

قياس الزاوية فى الربع الثانى = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

قياس الزاوية فى الربع الثالث

= ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° }

تدريـــــــب

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية :-

$\boxed{١}$ ٢جاس + جاس = ٠

$\boxed{٢}$ جتا^{٢}س − جتاس = ٠

$\boxed{٣}$ جتاس + ٢جاس جتاس = ٠

$\boxed{٤}$ جا^{٢}س − ٣جتا^{٢}س = ٠

$\boxed{٥}$ ٢ظا^{٢}س + ظاس − ١ = ٠

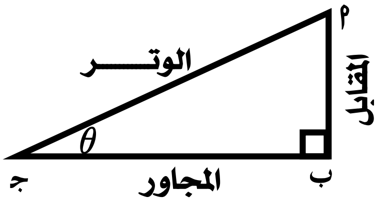
$\boxed{٦}$ ٣قا^{٢}س − ٤قاس − ٤ = ٠

$\boxed{٧}$ ٣جتا^{٢}س − جتاس − ٢ = ٠

حل المثلث القائم

- أى مثلث يحتوى على ست عناصر (٣ أضلاع + ٣ زوايا) و المقصود بحل المثلث هو إيجاد أطوال أضلاعه و قياسات زواياه الغير معلومة
- لحل المثلث القائم يلزم أن نعرف طولا ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه و قياس إحدى زاويتيه الحادتين
- نستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة و نظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم بحيث :

فى △ ؟ب ج القائم الزاوية فى ب



① جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{؟ب}}{\text{؟ج}}$

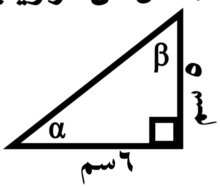
② جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{؟ج}}$

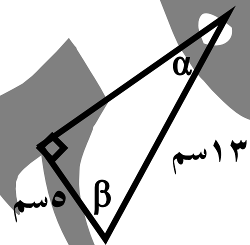
③ ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{؟ب}}{\text{ب ج}}$

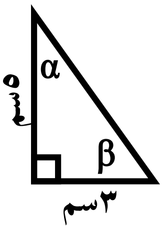
④ $(\text{؟ج})^2 = (\text{؟ب})^2 + (\text{ب ج})^2$

أولا : حل المثلث القائم إذا علم طولا ضلعين فيه

[١] أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل من الأشكال التالية :-

Ⓟ


Ⓑ


Ⓙ


الحـــــــل

شكل Ⓟ

∵ ظا α = $\frac{٥}{٦}$

∴ ق∠α = ٢٠ً ٤٨َ ٣٩°

∴ ق∠β = ٩٠ − (٢٠ً ٤٨َ ٣٩°)

= ٤٠ً ١١َ ٥٠°

شكل Ⓑ

∵ جا α = $\frac{٥}{١٣}$

∴ ق∠α = ١٣ً ٢٧َ ٢٢°

∴ ق∠β = ٩٠ − (١٣ً ٢٧َ ٢٢°)

= ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°

شكل Ⓙ

∵ ظا α = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق∠α = ٥٠ً ٥٧َ ٣٠°

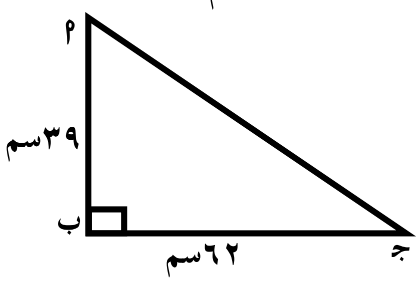
∴ ق∠β = ٩٠ − (٥٠ً ٥٧َ ٣٠°)

= ١٠ً ٢َ ٥٩°

[٢] حل المثلث ؟ب ج القائم الزاوية فى ب و الذى فيه :

Ⓟ ؟ب = ٣٩سم ، ب ج = ٦٢سم
Ⓑ ؟ب = ١٢,٥سم ، ب ج = ١٧,٦سم
Ⓙ ؟ب = ٥,٣سم ، ؟ج = ١٢,٢سم
Ⓓ ب ج = ٣١سم ، ؟ج = ٤٢سم

الحـــــــل

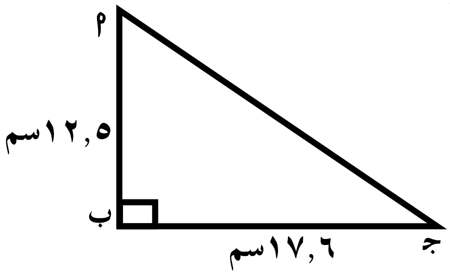


Ⓟ $(\text{؟ج})^2 = (\text{؟ب})^2 + (\text{ب ج})^2$ = ١٥٢١ + ٣٨٤٤ = ٥٣٦٥

∴ ؟ج = $\sqrt{٥٣٦٥}$ = ٧٣,٢٥سم

∴ ظا ج = $\frac{٣٩}{٦٢}$ ⇐ ق∠ج = ١٦ً ١٠َ ٣٢°

∴ ق∠؟ = ٩٠ − (١٦ً ١٠َ ٣٢°) = ٤٤ً ٤٩َ ٥٨°

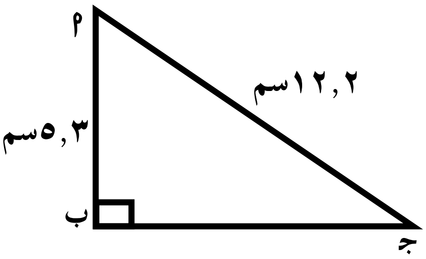


(ب) (أ ج)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب ج)^٢ = ٣٠٩,٧٦ + ١٥٦,٢٥ = ٤٦٦,٠١

∴ أ ج = √٤٦٦٫٠١ = ٢١,٥٩ سم

∴ ظا ج = ١٢٫٥ / ١٧٫٦ ⇐ ق∠ج = ٢٧ً ٢٣َ ٣٥°

∴ ق∠أ = ٩٠ − (٢٧ً ٢٣َ ٣٥°) = ٣٣ً ٣٦َ ٥٤°

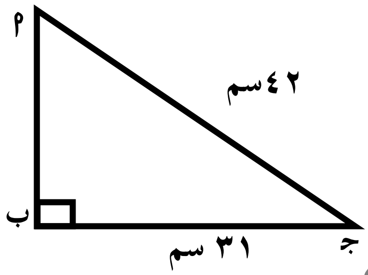


(ج) (ب ج)^٢ = (أ ج)^٢ − (أ ب)^٢ = ١٤٨,٨٤ − ٢٨,٠٩ = ١٢٠.٧٥

∴ ب ج = √١٢٠٫٧٥ = ١٠,٩٩ = ١١سم

∴ جا ج = ٥٫٣ / ١٢٫٢ ⇐ ق∠ج = ٥٥ً ٤٤َ ٢٥°

∴ ق∠أ = ٩٠ − (٥٥ً ٤٤َ ٢٥°) = ٥ً ١٥َ ٥٤°



(د) (أ ب)^٢ = (أ ج)^٢ − (ب ج)^٢ = ١٧٦٤ − ٩٦١ = ٨٠٣

∴ أ ب = √٨٠٣ = ٢٨,٣٤سم

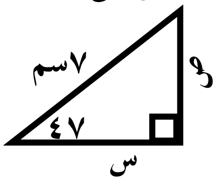
∴ جا أ = ٣١ / ٤٢ ⇐ ق∠أ = ٩ً ٣٤َ ٤٧°

∴ ق∠ج = ٩٠ − (٩ً ٣٤َ ٤٧°) = ٥١ً ١٥َ ١٢°

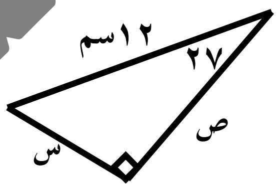
ثانياً : حل المثلث القائم إذا علم طول ضلع و قياس إحدى زاويتيه الحادتين

[٣] أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل من الأشكال التالية :-

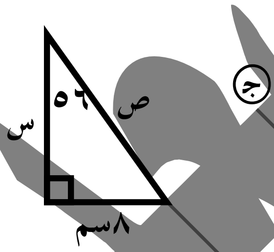
(أ)



(ب)



(ج)



الحـــــــــل

(أ) جا ٤٧ = ص / ٧ ⇐ ص = ٧ جا ٤٧ = ٥,١٢سم

جتا ٤٧ = س / ٧ ⇐ س = ٧ جتا ٤٧ = ٤,٧٧سم

(ب) جا ٢٧ = س / ١٢ ⇐ س = ١٢جا ٢٧ = ٥,٤٥سم

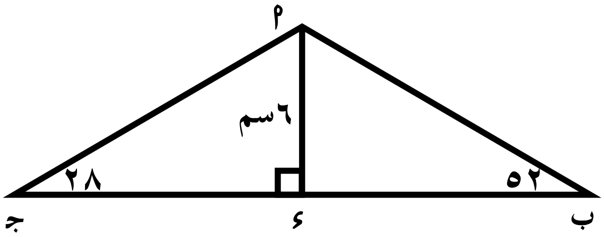
جتا ٢٧ = ص / ١٢ ⇐ ص = ١٢جتا ٢٧ = ١٠,٦٩سم

(ج) ظا ٥٦ = ٨ / س ⇐ س = ٨ / ظا ٥٦ = ٥,٤سم

جا ٥٦ = ٨ / ص ⇐ س = ٨ / جا ٥٦ = ٩,٦٥سم

[٤] أ ب جـ **مثلث رسم** أ ء ⊥ ب جـ **فإذا كان :** أ ء = ٦سم ، ق ∠ب = ٥٢° ، ق ∠جـ = ٢٨°

فأوجد طول ب جـ **لأقرب سنتيميتر**



الحـــــــــــــل

∵ أ ء ⊥ ب جـ

∴ ظا ب = ٦ / ب ء ⇐ ب ء = ٦ / ظا ٥٢ = ٤,٧سم

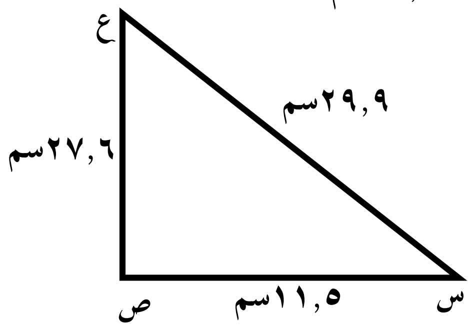
∴ ظا جـ = ٦ / ء جـ ⇐ ء جـ = ٦ / ظا ٢٨ = ١١,٣سم

∴ ب جـ = ٤,٧ + ١١,٣ = ١٦سم

---

[٥] س ص ع **مثلث فيه :** س ص = ١١,٥سم ، ص ع = ٢٧,٦سم ، س ع = ٢٩,٩سم

أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد قياس زاوية س



الحـــــــــــــل

∵ (س ع)² = ٨٩٤,٠١

∵ (س ص)² + (ص ع)² = ١٣٢,٢٥ + ٧٦١.٧٦ = ٨٩٤,٠١

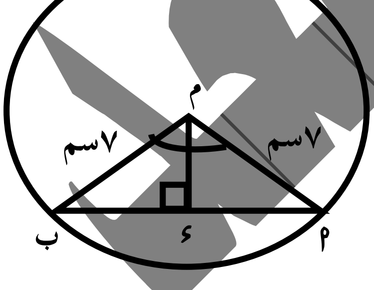
∵ (س ص)² + (ص ع)² = (س ع)²

∴ **المثلث** س ص ع **قائم الزاوية فى ص**

∵ جاس = ص ع / س ع = ٢٧٫٦ / ٢٩٫٩ ⇐ ق ∠س = ٦٧° ٣٣َ

---

[٦] **دائرة م طول نصف قطرها** ٧سم ، **رسم فيها وتر** أ ب **يقابل زاوية مركزية قياسها** ١١٠° ، **احسب طول** أ ب **لأقرب ثلاثة أرقام عشرية**



الحـــــــــــــل

العمل : نرسم م ء ⊥ أ ب

∵ م أ = م ب = ٧سم ، ∵ م ء ⊥ أ ب

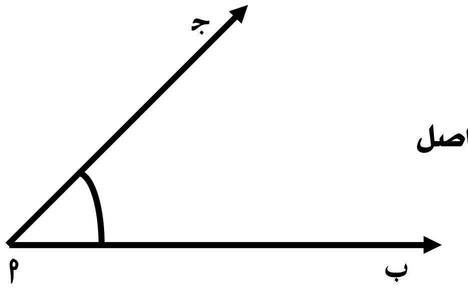
∴ ء **منتصف** أ ب ، م ء **ينصف** ∠ أ م ب

∴ ق ∠ أ م ء = ١١٠ / ٢ = ٥٥°

∵ جا ∠ أ م ء = أ ء / أ م ⇐ أ ء = جا ∠ أ م ء × أ م = ٧ × جا ٥٥ = ٥,٧٣٤سم

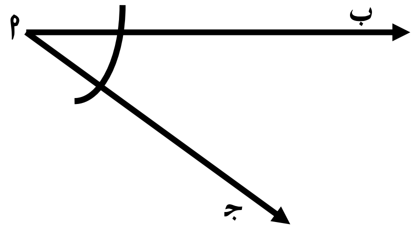
∴ أ ب = ٢ × ٥,٧٣٤ = ١١,٤٦٨سم

زوايا الإرتفاع و زوايا الإنخفاض



١ زاوية الإرتفاع

إذا فرض أن هناك راصد عند نقطة أ و نظر الى جسم عند نقطة جـ أعلى مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{أب}$ الأفقى ، $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين الراصد و الجسم المرصود تسمى (زاوية الإرتفاع)



٢ زاوية الإنخفاض

إذا فرض أن هناك راصد عند نقطة أ و نظر الى جسم عند نقطة جـ أسفل مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{أب}$ الأفقى ، $\overleftarrow{أجـ}$ الواصل بين الراصد و الجسم المرصود تسمى (زاوية الإنخفاض)

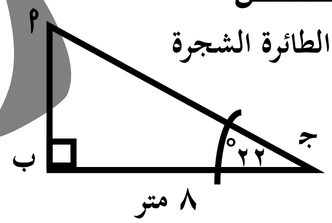
ملحوظة هامة

قياس زاوية الإنخفاض تساوى قياس زاوية الارتفاع

أمثـــلــة

① **من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة و جد أن قياس ارتفاع قمة الشجرة ٢٢° أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين**

الحـــل



نفرض أب ارتفاع الطائرة الشجرة

ظا ٢٢ = $\frac{أب}{٨}$

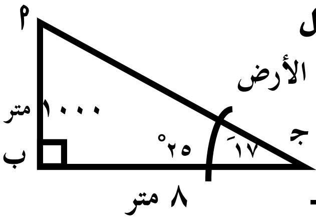
∴ أب = ٨ ظا٢٢

= ٣,٢٣متر

ارتفاع الشجرة = ٣,٢٣متر

② **رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° أوجد بعد الراصد عن الطائرة**

الحـــل



نفرض أب ارتفاع الطائرة عن الأرض

أجـ بعد الراصد عن الطائرة

جا ١٧َ ٢٥° = $\frac{١٠٠٠}{أجـ}$

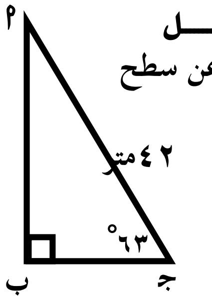
∴ أجـ = $\frac{١٠٠٠}{جا ١٧َ ٢٥°}$ = ٢٣٤١,٤ متر

بعد الراصد عن الطائرة = ٢٣٤١,٤ متر

===

③ **طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متر فإذا كان قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوى ٦٣° أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض**

الحـــل



نفرض أب يمثل ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ، أجـ طول الخيط

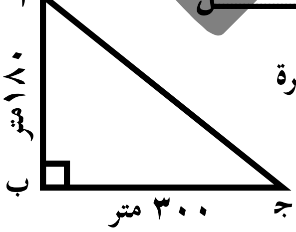
∵ جا ٦٣ = $\frac{أب}{٤٢}$

أب = ٤٢ × جا٦٣ = ٣٧متر

∴ ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض = ٣٧متراً

④ **من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قابر يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟**

الحـــل



نفرض أب يمثل ارتفاع الصخرة

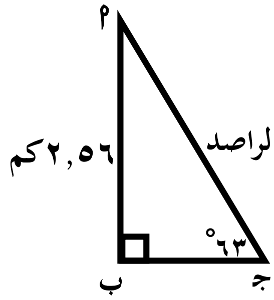
ظا جـ = $\frac{١٨٠}{٣٠٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

ق∠جـ = ٥٠ً ٥٧َ ٣٠°

قياس زاوية الإنخفاض بالراديان

= ٥٠ً ٥٧َ ٣٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٠,٥٤ ء

⑤ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو ٦٣° أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة و الراصد



الحــــــل

نفرض أن أب يمثل إرتفاع الجبل

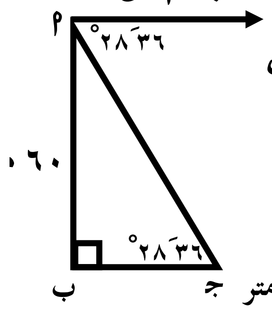
أج يمثل البعد بين النقطة (ج) و الراصد

جا ٦٣ = $\frac{\text{٢,٥٦}}{\text{أج}}$

أج = $\frac{\text{٢,٥٦}}{\text{جا ٦٣}}$ = ٢,٨٧٣كم

البعد بين النقطة و الراصد = ٢٨٧٣ متر

⑥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ متر وجد ان قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوى ٣٦َ ٢٨° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر



الحــــــل

نفرض أن أب يمثل ارتفاع البرج

ج يمثل الجسم

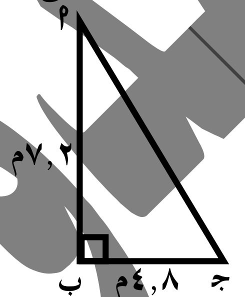
ظا ٣٦َ ٢٨° = $\frac{\text{٦٠}}{\text{ب ج}}$

ب ج = $\frac{\text{٦٠}}{\text{ظا ٣٦َ ٢٨°}}$ = ١١٠ متر

بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٠ متر

==

⑦ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلا على الأرض طوله ٤,٨ متر أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ



الحــــــل

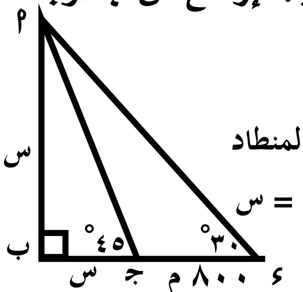
نفرض أن أب يمثل عمود الإنارة

ظاج = $\frac{\text{٧,٢}}{\text{٤,٨}}$

∴ ق(∠ج) = ٠,٩٨٣ ء

==========================

⑧ شاهد راصد أن زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى $\frac{\pi}{٦}$ و لما سار الراصد فى مستوى افقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الإرتفاع هى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر



الحــــــل

نفرض أن أب يمثل ارتفاع المنطاد

فى Δ أب ج : أب = ب ج = س

ظا ٣٠ = $\frac{\text{س}}{\text{٨٠٠ + س}}$

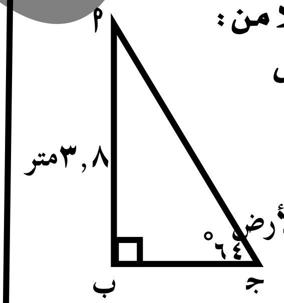
$\sqrt{٣}$ س = ٨٠٠ + س ⇐ س = ١,٩٣ متر

==========================

⑨ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، و يرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر و الطرف السفلى للسلم على الأرض و قياس زاوية ميل السلم عن الأرض ٦٤° أوجد لأقرب رقمين عشريين كلا من :

[١] بعد الطرف السفلى عن الأرض

[٢] طول السلم



الحــــــل

نفرض أن أب يمثل ارتفاع السلم عن الأرض

ظا ٦٤ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{ب ج}}$

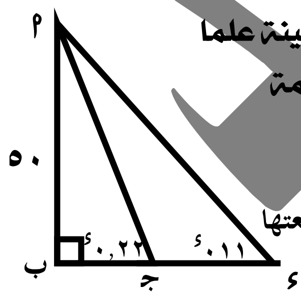
∴ ب ج = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{ظا٦٤}}$ = ١,٨٥ متر

جا ٦٤ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{أج}}$

أج = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{جا٦٤}}$ = ٤,٢٣ متر

(١٠) تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ متر ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,١١ ء و بعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,٢٢ ء احسب سرعة السفينة علما بأنها تسير بسرعة منتظمة

الحــــــل



نفرض أن ج ء يمثل المسافة التى قطعتها السفينة خلال ١٥ دقيقة

ظا ٠,١١ء = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ب ء}}$

ب ء = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٠,١١ء}}$ = ٤٥٢,٧ متر

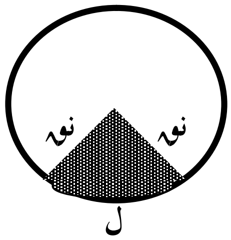
ظا ٠,٢٢ء = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ب ج}}$ ∴ ب ج = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٠,٢٢ء}}$ = ٢٢٣,٦ متر

ج ء = ب ء − ب ج = ٤٥٢,٧ − ٢٢٣,٦ = ٢٢٩,١ متر تقريبا

∴ سرعة السفينة = $\frac{\text{٢٢٩,١}}{\text{١٥}}$ = ١٥,٣ متر / دقيقة

القطاع الدائرى

هو جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها و بنصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس



لاحظ التالى :-

① $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة (٣٦٠)}}$

② **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{١}{٢}\theta^{د}$ نق^{٢}

③ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠} \times \pi$ نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ل نق

④ **محيط القطاع الدائرى** = ٢ نق + ل

حيث : ل طول القوس

أمثـــــلة

١ **أكمـــــــل العبارات التالية :-**

❶ **مساحة القطاع الدائرى الذى فيه : ل = ٦سم ، نق = ٤سم يساوى** ....

❷ **مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤سم ، و محيطه ٢٠ سم تساوى** .... سم

❸ **محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤سم^{٢} ، طول قوسه ٨سم يساوى** ....

❹ **مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢^{د} و طول نصف قطر دائرته ٤سم يساوى** ....

❺ **محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤سم و طول قطر دائرته ١٠سم يساوى** ....

❻ **مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠$^{\circ}$ و طول نصف قطر دائرته ٣سم يساوى** ....

❼ **إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠سم^{٢} و قياس زاويته ٢,٢^{د} فإن طول نصف قطره يساوى** ....

الحـــــــل

❶ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢سم^{٢}

❷ **محيط القطاع الدائرى** = ٢ نق + ل ∴ ٢٠ = ٢ × ٤ + ل ∴ ل = ١٢

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٤ = ٢٤سم^{٢}

❸ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{١}{٢}$ ل نق ∴ ٢٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × نق ∴ نق = ٦سم

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠سم

❹ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{١}{٢}\theta^{د}$ نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١,٢^{د} × ٤ × ٤ = ٩,٦سم^{٢}

❺ **محيط القطاع الدائرى** = ٢ نق + ل = ٢ × ٥ + ٤ = ١٤سم

❻ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠} \times \pi$ نق^{٢} = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times \pi$ × ٣ × ٣ = ٣π سم^{٢}

❼ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{١}{٢}\theta^{د}$ نق^{٢} ⟸ ١١٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٢,٢^{د} × نق^{٢} ⟸ نق^{٢} = ١٠٠ ⟸ نق = ١٠سم

==

٢ **قطاع دائرى طول قوسه ١٦سم و طول نصف قطر قاعدته ٩سم أوجد مساحته**

الحـــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٩ = ٧٢سم^{٢}

==

٣ **قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠$^{\circ}$ و طول نصف قطر قاعدته ٣,٥سم أحسب لأقرب سم^{٢} مساحة القطاع**

الحـــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠} \times \pi$ نق^{٢} = $\frac{٣٠}{٣٦٠} \times \frac{٢٢}{٧}$ × ٣.٥ × ٣,٥ = ٣,٢ سم^{٢}

٤ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠سم و قياس زاويته ١٢٠°

الحـــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٠ \times ١٠$ = ١٠٤,٧ سم²

==

٥ قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٤٨° و طول نصف قطر دائرته ٦سم أوجد مساحة القطاع لأقرب سم²

الحـــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{٤٨}{٣٦٠} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٦ \times ٦$ = ١٥ سم²

==

٦ اوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠سم و قياس زاويته ١,٢ء

الحـــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}\theta^{ء}$ نق² = $\frac{١}{٢} \times ١,٢^{ء} \times ١٠ \times ١٠$ = ٦٠سم²

==

٧ قطاع دائرى طول قوسه ٧سم ، و محيطه ٢٥سم أوجد مساحته

الحـــــــــل

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل ∴ ٢٥ = ٢ × نق + ٧ ∴ نق = $\frac{٢٥ - ٧}{٢} = \frac{١٨}{٢}$ = ٩سم

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢} \times ٧ \times ٩$ = ٣١,٥سم²

==

٨ قطاع دائرى محيطه ٢٤سم و طول قوسه ١٠سم أوجد مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع

الحـــــــــل

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل ∴ ٢٤ = ٢ × نق + ١٠ ∴ نق = $\frac{٢٤ - ١٠}{٢} = \frac{١٤}{٢}$ = ٧سم

مساحة الدائرة = π نق² = $\frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٧$ = ١٥٤سم²

==

٩ قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠سم² و طول نصف قطر دائرته يساوى ١٥سم أوجد طول قوس القطاع و قياس زاويته المركزية بالراديان

الحـــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق ∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$ ل × ١٥ ∴ ل = ٣٦سم

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}\theta^{ء}$ نق² ∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}\theta^{ء} \times ١٥ \times ١٥$

∴ $\theta^{ء} = \frac{٥٤٠}{٢٢٥}$ = ٢,٤ء

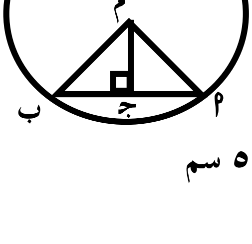
==

(١٠) دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥سم ، رسم فيها نصفا القطرين م أ ، م ب بحيث: أ ب = ١٢سم أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سم²

الحـــــــــل

∵ ظا أ م جـ = $\frac{٦}{٧,٥}$ = ٠,٨ ⇐ ق∠أ م جـ = ٨َ ٥٣°

∴ ق ∠أ م ب = ٢ق∠أ م جـ = ١٦َ ١٠٦°

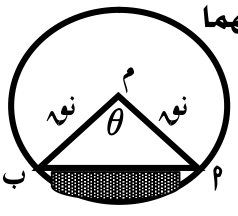


∵ **مساحة القطاع الدائرى** = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{١٠٦^\circ\ ١٦'}{٣٦٠} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧,٥ \times ٧,٥$ = ٥٢ سم

القطعة الدائرية

هى جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس

لاحظ التالى :-



① مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

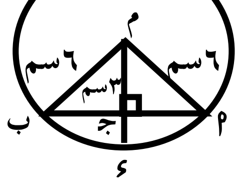
② مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ − جا θ)

③ مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ (المنعكسة) − جا θ (المنعكسة))

④ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها

أمثـــــلة



① فى الشكل المرسوم : م دائرة طول نصف قطرها ٦سم

$\overline{مج} \perp \overline{أب}$ ، م ج = ٣سم أكمـــــل ما يأتى :

[١] ارتفاع القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ... سم

[٢] ارتفاع القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... سم

[٣] قياس زاوية القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ...°

[٤] قياس زاوية القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ...°

[٥] مساحة المثلث م أ ب = ... سم^2

[٦] مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب بدلالة π = ... سم^2

[٧] مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = ... سم^2

الحـــــــــل

[١] ٣ [٢] ٩

[٣] جا ∠ أ م ء = $\frac{مج}{مأ}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{1}{2}$ ⟸ ق ∠ أ م ء = ٦٠° ⟸ ق ∠ أ م ب = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

[٤] ق ∠ أ م ب (المنعكسة) = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠°

[٥] مساحة المثلث م أ ب = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٦ × جا ١٢٠ = $\frac{1}{2}$ × ٣٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{2}$ = ٩$\sqrt{٣}$ سم^2

[٦] مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب بدلالة π = $\frac{هـ°}{٣٦٠}$ × π نق^2 = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × π × ٦ × ٦ = ١٢π سم^2

[٧] مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب − مساحة المثلث م أ ب

= (١٢π − ٩$\sqrt{٣}$) سم^2

---

② أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :-

[١] طول نصف قطر دائرتها ١٢سم ، و قياس زاويتها يساوى ١,٤^{ء}

[٢] طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، و قياس زاويتها يساوى ١٣٥°

الحـــــــــل

[١] مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ − جا θ) = $\frac{1}{2}$ × ١٤٤ [١,٤^{ء} − جا (١,٤^{ء} × ١٨٠ × $\frac{٧}{٢٢}$)]

= ٣٠سم^2

[٢] مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ − جا θ) = $\frac{1}{2}$ × ٦٤ [(١٣٥ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$) − جا ١٣٥]

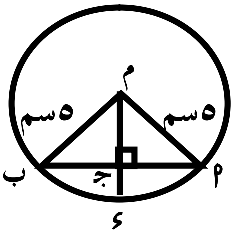
= ٥٢,٨سم^2

③ **أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :-**

[١] **طول وترها ٦سم ، و طول نصف قطر دائرتها ٥سم**

[٢] **ارتفاعها ٥ سم ، و طول نصف قطر دائرتها ١٠سم**

الحـــــــل



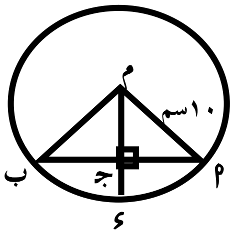
[١] م جـ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤سم

∵ جا أ م جـ = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦ ⇐ ق∠أ م جـ = ٣٦,٨٧°

∴ ق∠أ م ب = ٢ × ٣٦,٨٧ = ٧٣,٧٤°

∴ θ ^ء = ٧٣,٧٤° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٢٩ ^ء

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق² (θ ^ء − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ [١,٢٩ ^ء − جا ٧٣,٧٤°] = ٤,١٢٤سم²



[٢] م جـ = ١٠ − ٥ = ٥سم

∵ جتا أ م جـ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ق∠أ م جـ = ٦٠°

∴ ق∠أ م ب = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

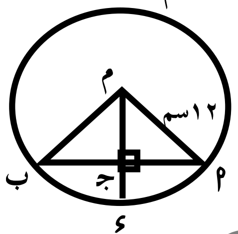
∴ θ ^ء = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,٠٩٥ ^ء

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق² (θ ^ء − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [٢,٠٩٥ ^ء − جا ١٢٠°] = ٦١,٤٥سم²

---

④ **أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى نصف قطر دائرتها يساوى ١٢سم**

الحـــــــل



∵ م أ = م ب = أ ب = ١٢سم ⇐ ق∠أ م ب = ٦٠°

∴ ق∠أ م ب (المنعكسة) = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∴ θ ^ء = ٣٠٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٥,٢٣٨ ^ء

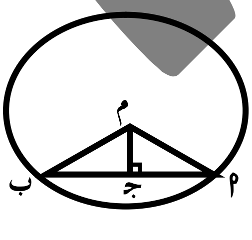
مساحة القطعة الدائرية الكبرى = $\frac{١}{٢}$ نق² (θ ^ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤ [٥,٢٣٨ ^ء − جا ٣٠٠°] = ٤٣٩,٤٩سم²

---

⑤ **وتر فى دائرة طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة**

الحـــــــل



أ م = نق = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم

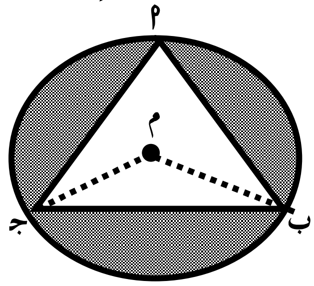
ظا أ م ء = $\frac{٤}{٣}$ ⇐ ق∠أ م ء = ٥٣° ٨َ

∴ ق∠أ م ب = ٢ × (٥٣° ٨َ) = ١٠٦° ١٦َ

∴ θ ^ء = ١٠٦° ١٦َ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٨٦ ^ء

∴ **مساحة القطعة الدائرية** = $\frac{١}{٢}$ نق² (θ ^ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ [١,٨٦ ^ء − جا ١٠٦° ١٦َ] = ١١سم²



⑥ **فى الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظلله**

الحـــــــــــل

∵ Δ أ ب جـ **مثلث متساوى الأضلاع** ⇐ ق∠أ = ٦٠°

∴ ق∠ب م جـ = ٢ ق∠أ = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

∴ $\theta^{ء}$ = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,١^{ء}

∴ **مساحة القطعة الدائرية** = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ [٢,١^{ء} − جا ١٢٠°] = ٣٩سم^{٢}

∴ **مساحة المنطقة المظللة** = ٣ × ٣٩ = ١١٧سم^{٢} تقريبا

---

⑦ **قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ، و مساحة سطحها ٥٦سم^{٢} أوجد طول نصف قطرها**

الحـــــــــــل

$\theta^{ء}$ = ٩٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٥٧^{ء}

∴ **مساحة القطعة الدائرية** = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

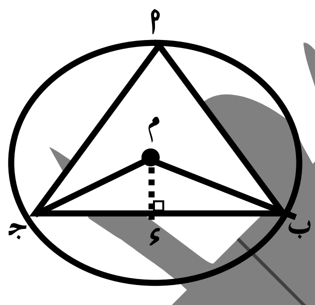
٥٦ = $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} × [١,٥٧^{ء} − جا ٩٠°]

∴ نق^{٢} = (٢ × ٥٦) ÷ (١,٥٧^{ء} − ١) = ١٩٦

∴ نق = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

---

⑧ **أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤سم ، رسمت دائرة برؤوسه ، أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{ب جـ}$**



الحـــــــــــل

∵ جا (∠ ب م ء) = $\frac{١٢}{نق}$

∴ نق = $\frac{١٢}{جا ٦٠}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

∴ $\theta^{ء}$ = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,١^{ء}

∴ **مساحة القطعة الدائرية التى وترها $\overline{ب جـ}$** = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − جا θ)

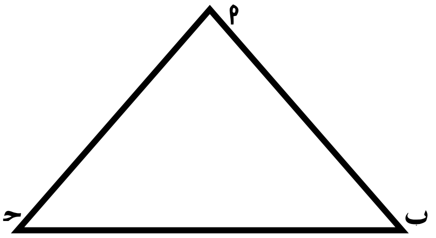
= $\frac{١}{٢}$ × ١٩٢ [٢,١^{ء} − جا ١٢٠°] = ٣٥سم^{٢}

المساحـــــــات

لاحظ التالى :-

١ **مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما**

أى أن :-



م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب × ا جـ × جا ا

= $\frac{١}{٢}$ ا ب × ب جـ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ا جـ × جـ ب × جا جـ

٢ **مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما**

و من ذلك نستنتج أن :-

① مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

② مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

٣ **مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن و طول ضلعه** س = $\frac{١}{٤}$ ن س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

٤ **مساحة المثلث** ا ب جـ = $\sqrt{ح\ (ح - ا ب)\ (ح - ب جـ)\ (ح - ا جـ)}$

حيث : ح = $\frac{١}{٢}$ **محيط المثلث** ا ب جـ

أمثـــــــلة

١ **أوجد مساحة المثلث** ا ب جـ **فى كل من الحالات التالية :**

① ا ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، ق(∠ ب) = ٩٠°

② ا جـ = ١٢سم ، **طول العمود المرسوم من** ب **على** $\overline{ا جـ}$ **يساوى** ٧سم

③ ا ب = ١٦سم ، ب جـ = ٢٠سم ، ق(∠ ب) = ٤٦°

الحـــــــل

① م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب × ب جـ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ × جا ٩٠° = ٢٤سم^{٢}

② م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ **طول القاعدة × الإرتفاع** = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٧ = ٤٢سم^{٢}

③ م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب × ب جـ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٠ × جا ٤٦° = ١١٥سم^{٢}

==

٢ **أوجد مساحة المثلث** ا ب جـ **الذى فيه :** ب جـ = ١٦سم ، ب ا = ٢٢سم ، ق(∠ ب) = ٦٣° **مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية**

الحـــــــل

م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب ا × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٢ × جا ٦٣° = ١٥٦,٨١٧سم^{٢}

==

٣ **أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢سم و قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤°**

الحـــــــل

م△ ا ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ × جا ٦٤° = ٦٤,٧سم^{٢}

٤ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢سم ، ١٦سم و قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع

الحـــــــــــل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٦ × جا ٦٨° = ٨٩سم²

==

٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٢٢سم ، ٤٦سم و قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

الحـــــــــــل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٢ × ٤٦ × جا ١٢٢° = ٦٢٤,٢سم²

==

٦ أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية : (مقربا الناتج لأقرب جزء من عشرة)

(١) خماسى منتظم طول ضلعه = ١٦سم

(٢) سداسى منتظم طول ضلعه = ١٢سم

الحـــــــــــل

(١) مساحة المضلع الخماسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٥ × (١٦)² × ظتا ٣٦° = ٤٤٠,٤سم²

(٢) مساحة المضلع السداسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٦ × (١٢)² × ظتا ٣٠° = ٣٧٤,١سم²

==

٧ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ ضلعا و و طول ضلعه ١٠سم

الحـــــــــــل

مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ × ١٢ × (١٠)² × ظتا ١٥° = ١١١٩,٦سم²

==

٨ احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، أ جـ = ١١سم

الحـــــــــــل

محيط المثلث = ٢ح = ٨ + ٧ + ١١ = ٢٦سم ⇐ ح = ١٣سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\sqrt{ح (ح - أ ب) (ح - ب جـ) (ح - أ جـ)}$

= $\sqrt{١٣ × ٥ × ٦ × ٢}$ = ٢٨سم² تقريبا

تدريب :-

إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩$\sqrt{٣}$ سم²

فإن : س = ...

إعداد الأستاذ / ممدوح سعد

ت / ٠١٢٨٦٧١٥٥١٦

مديرية التربية و التعليم بأسيوط — مدرسة المنشأة الكبرى — المادة : الهندسة التحليلية

إدارة القوصية التعليمية — الثانوية بنات — الزمن : ساعتان

إمتحان الصف الأول الثانوى (الفصل الدراسى الثانى ٢٠١٤/٢٠١٥م)

أجيبى عن الأسئلة الآتية : **يسمح بأستخدام الآلة الحاسبة**

السؤال الأول :- أكملى مايلى :

(أ) فى $\triangle$ ء هـ و يكون : $\overrightarrow{\text{ء هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ و}} + \overrightarrow{\text{و ء}} =$ ....

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ...

(جـ) المعادلة العامة للمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٥) هى ....

(د) قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٧ تساوى .... درجة

السؤال الثانى : تخيرى الإجابة الصحيحة ممابين القوسين

(أ) أذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٤) فإن : $٢\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

{ (١١ ، ١١) ، (١١ ، ٨) ، (١ ، ٦) ، (٦ ، ٨) }

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ = ١٠٠ $\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ = ٥٠ $\overrightarrow{\text{ى}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}}$ = ... $\overrightarrow{\text{ى}}$ { ٥٠ ، ١٥٠ ، −٥٠ ، −١٥٠ }

(جـ) إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −١) فإن محور السينات يقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ....

{ ٢ : ١ ، ١ : ٢ ، ٢ : ٣ ، ٣ : ٢ }

(د) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم : س + ص = ٠ هو .... وحدة طول

{ ١ ، ٢ ، $\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{2}$ }

السؤال الثالث :-

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = ($6\sqrt{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$) متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل فأوجدى إحداثى النقطة أ و

إذا كان $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٢) فأثبتى أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

(ب) أوجدى معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢، ٣س − ص = ٦ و موازيا المستقيم ص = س

السؤال الرابع :-

(أ) فى $\triangle$ أ ب جـ : ء $\in \overline{\text{ب جـ}}$ ، ب ء : ء جـ = ٣ : ٢ فأثبتى أن : $٢\overrightarrow{\text{أب}} + ٣\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٥\overrightarrow{\text{أء}}$

(ب) أوجدى الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة ٧ = (٤ ، ٣) و المتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٢ ، ١) متجه إتجاه له

السؤال الخامس :-

(أ) أذا كان : أ = (٦ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٥) فأوجدى إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

(ب) أثبتى أن $\triangle$ س ص ع : س = (٣ ، ٥) ، ص = (٤ ، ٢) ، ع = (−٥ ، −١٠) قائم الزاوية فى ص ثم

أوجدى طول قطر الدائرة المارة برؤوسه و إحداثى مركز الدائرة

إنتهت الأسئلة ، و الله الموفق