المميز

في

المراجعة النهائية

التفاضل و التكامل

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٣

أحمد الشنتورى

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

** قواعد إيجاد نهاية دالة عند نقطة

* لإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فنحصل :

(١) ل $\in$ ح فيكون هو نهاية د (س)

(٢) $\frac{ب}{٠}$ حيث ب $\in$ ح – { ٠ } فتكون نهاية د (س) ليس لها وجود

(٣) $\frac{٠}{٠}$ فتكون نهاية د (س) موجودة تحدد بإحدى الطرق التالية :

* التحليل ، القسمة المطولة على العامل الصفرى ، الضرب فى المرافق
إذا أحتوت الدالة على جذور تربيعية لحذف العامل الصفرى

* إذا كانت د (س) = $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ فإن $\lim_{س \to أ}$ د (س) = ب $أ^{ن-١}$

* إذا كانت د (س) = $\frac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ}$ فإن $\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\frac{ب}{م}$ $أ^{م-م}$

** قواعد إيجاد نهاية الدوال المثلثية

* $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا س}{س}$ = ١ حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى

* $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{ظا س}{س}$ = ١ ، $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا أ س}{ب س}$ = $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{حا أ س}{ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$

** نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

$\lim_{س \to أ}$ د (س) = ل إذا و فقط إذا كان : د ($أ^{+}$) = د ($أ^{-}$) = ل

* ملاحظات :

* إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار أ مباشرة يلزم فى هذه الحالة بحث كل من د ($أ^{+}$) = د ($أ^{-}$) ثم المقارنة بينهما " إن وجدتا "

* أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية مباشرة

* إذا كانت الدالة معرفة على] أ ، ب [أو [أ ، ب] فللبحث عن :

(١) $\lim_{س \to أ}$ د (س) يكتفى بالنهاية اليمنى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

(٢) $\lim_{س \to ب}$ د (س) يكتفى بالنهاية اليسرى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

تمارين محلولة

ابحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = { س^{٢} + ٢ ، س > – ٢ ؛ ٢ س + ٣ ، س < – ٢ } عند س = – ٢

الحل

∵ د (٢^{+}) = $\lim_{س \to -٢^{+}}$ (س^{٢} + ٢) = ٦

، د (٢^{-}) = $\lim_{س \to -٢^{-}}$ (٢ س + ٣) = – ١

، ∵ د (-٢^{+}) $\neq$ د (-٢^{-}) ∴ $\lim_{س \to -٢}$ د (س) ليس لها وجود

ابحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = { $\frac{(س + ١)^{٤} - ١}{س}$ ، س < ٠ ؛ $\frac{٥ س - حا س}{س حتا س}$ ، س > ٠ } عند س = ٠

الحل

∵ د (٠^{+}) = $\lim_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{(س + ١)^{٤} - ١}{(س + ١) - ١}$ = ٤

، د (٠^{-}) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{٥ س - حا س}{س حتا س}$ = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{٥ - \frac{حا س}{س}}{حتا س}$ = ٤

، ∵ د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = ٤ ∴ $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ٤

إذا كان للدالة د : د (س) = { $\frac{(س + ١)^{٤} - ١}{س}$ ، س < ٠ ؛ $\frac{ل س - حا س}{س حتا س}$ ، س > ٠ }

نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة ل

الحل

∵ د (س) لها نهاية عند س = ٠ ∴ د (٠ $^{+}$) = د (٠ $^{-}$)

∴ $\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{(س+١)^{٤} - ١}{(س+١) - ١} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{ك - \frac{حا س}{س}}{حتا س}$

∴ ٤ = ك − ١ و منها : ك = ٥

ابحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{حا(س-٢)^{٢}}{س-٢} & ، س < ٢ \\ ٤ - ٢س & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د (٢ $^{+}$) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ (س − ٢) × $\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{حا(س-٢)^{٢}}{(س-٢)^{٢}}$ = ٠ × ١ = ٠

، د (٢ $^{-}$) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (٤ − ٢س) = ٠

، ∵ د (٢ $^{+}$) = د (٢ $^{-}$) = ٠ ∴ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٠

إذا كان للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{ك س^{٢} + م س - ٥}{س - ١} & ، س < ١ \\ ك س + ٥ & ، س > ١ \end{cases}$

نهاية تساوى ٨ عند س = ١ أوجد قيم ك ، م

الحل

∵ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٨ ∴ د (١ $^{-}$) = ٨

∴ ك + ٥ = ٨ و منها : ك = ٣

، د (١ $^{+}$) = ٨

، ∵ المقام = ٠ عند س = ١ ∴ البسط = ٠ عند س = ١

∴ ٣ + م − ٥ = ٠ و منها : م = ٢

ابحث وجود نهاية الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣} & عندما \quad س > ٣ \\ ٥ س^{٤} - ٤ س + ١٢ & عندما \quad س < ٣ \end{cases}$

عند س = ٣

الحل

∵ د (٣ $^{+}$) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (٥ س ^{٤} − ٤ س + ١٢) = ٤٠٥

، د (٣ $^{-}$) = $\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$ = ٥ × (٣) ^{٤} = ٤٠٥

، ∵ د (٣ $^{+}$) = د (٣ $^{-}$) = ٤٠٥ ∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ٤٠٥

إذا كان للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣} & عندما \quad س > ٣ \\ ٥ س^{٤} + ك س + ١٢ & عندما \quad س < ٣ \end{cases}$

نهاية عند س = ٣ أوجد قيمة ك

الحل

∵ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) موجودة ∴ د (٣ $^{+}$) = د (٣ $^{-}$)

∴ $\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (٥ س ^{٤} + ك س + ١٢)

∴ ٥ × (٣) ^{٤} − ٤٠٥ = ١٢ + ١٢

و منها : ك = − ٤

الإتصال

** إتصال دالة عند نقطة

* تكون الدالة د (س) عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

(١) د (س) معرفة عند س = أ أى أن : د (أ) موجودة

(٢) $\lim_{س \to أ}$ د (س) لها وجود (٣) $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

* ملاحظات :

إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة فإن :

د (س) تكون غير متصلة عند س = أ

* إذا كانت د (س) معرفة عند س = أ ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) لها وجود

و كانت الدالة غير متصلة عند س = أ لأن $\lim_{س \to أ}$ د (س) ≠ د (أ)

فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = أ بإعادة تعريفها عند س = أ بجعل

$\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

** إتصال دالة على فترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف = [أ ، ب [فإن الدالة تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف = [أ ، ب] فإن الدالة تكون متصلة إذا تحققت الشروط التالية : (١) الدالة متصلة على] أ ، ب [

(٢) الدالة متصلة من اليمين عند أ (٣) الدالة متصلة من اليسار عند ب

* ملاحظات

* إذا كانت الدالة غير متصلة عند حـ ∈] أ ، ب [فإنها تكون غير متصلة على] أ ، ب [

* دوال كثيرات الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* الدوال الكسرية الجبرية متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند أصفار دالة المقام

* دالة الجيب و دالة جيب التمام متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند النقط

س = ± ½ ط ، ± ¾ ط ، ± ٥/٤ ط ، ٠٠٠٠

تمارين محلولة

ابحث إتصال الدالة د : د (س) = { س ، ٠ < س < ١ ؛ ٣ س + ١ ، ١ < س ≤ ٣ ؛ س² + ٤ ، ٣ < س < ٦ }

عند : (١) س = ١ (٢) س = ٣

الحل

(١) ∵ د (س) غير معرفة عند س = ١ ∴ د (س) غير متصلة عند س = ١

(٢) ∵ د (٣) = ١٠ ، د (٣⁺) = $\lim_{س \to 3^+}$ (٣ س + ١) = ١٠

، د (٣⁻) = $\lim_{س \to 3^-}$ (س² + ٤) = ١٣

، ∵ د (٣⁺) ≠ د (٣⁻) ∴ $\lim_{س \to 3}$ د (س) غير موجودة

∴ د (س) غير متصلة عند س = ٣

ابحث إتصال الدالة د : د (س) = { | س | ، س ≠ ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ } عند س = ٠

الحل

∵ د (س) = { س² ، س < ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ − س² ، س > ٠ } ∴ د (٠) = ٢

، د (٠⁺) = $\lim_{س \to 0^+}$ (س²) = ٠ ، د (٠⁻) = $\lim_{س \to 0^-}$ (− س²) = ٠

∴ $\lim_{س \to 3}$ د (س) = ٠ ≠ د (٠) ∴ د (س) غير متصلة عند س = ٠

ابحث إتصال الدالة د : د (س) = { ٣ س² + ٨ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س + ٩ ، س > ١ } عند س = ١

الحل

∵ د (١) = ١١ ، د (١$^{+}$) = نهـــا$_{س \to ١^{+}}$ (٣ س^{٢} + ٨) = ١١

، د (١$^{-}$) = نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ (٢ س + ٩) = ١١

، ∵ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = ١١ ∴ نهـــا$_{س \to ١}$ د (س) = ١١

، ∵ د (١) = نهـــا$_{س \to ١}$ د (س) ∴ د (س) متصلة عند س = ١

إذا كانت الدالة د : د (س) = { م س^{٢} + ٤ ك ، س ≤ ١ ؛ ك س + ٣ م ، س > ١ } متصلة عند س = ١

، د (١) = ١١ أوجد قيم ك ، م

الحل

∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

∴ م + ٤ ك = ١١ ، ك + ٣ م = ١١

، و بحل المعادلتين ينتج : ك = ٢ ، م = ٣

إذا كان للدالة د : د (س) = { (√(س − ك) − ١) / (س − ٩) عندما س ≠ ٩ ؛ س − م عندما س = ٩ }

متصلة عند س = ٩ أوجد قيمة كل من ك ، م

الحل

∵ الدالة متصلة عند س = ٩ ∴ الدالة لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر ∴ البسط = صفر عند س = ٩

∴ √(9 − ك) − ١ = ٠ ∴ ك = ٨

∴ نهـــا$_{س \to ٩}$ (√(س − ٨) − ١) / (س − ٩) × (√(س − ٨) + ١) / (√(س − ٨) + ١) = نهـــا$_{س \to ٩}$ ١ / (√(س − ٨) + ١)

= ١/٢

∴ د (٩) = ١/٢ ∴ ٩ − م = ١/٢ ∴ م = ١٧/٢

إذا كانت الدالة د : د (س) = { (س^{٢} − (م + ١) س + م) / (س − ١) ، س ≠ ١ ؛ ٣ س − ١ ، س = ١ }

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة م

الحل

∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = نهـــا$_{س \to ١}$ د (س)

∴ ٢ = نهـــا$_{س \to ١}$ (س − ١) (س − م) / (س − ١) = ١ − م

، منها : م = − ١

إذا كان للدالة د : د (س) = { (س^{١٧} + س^{١٣} − ٢) / (س − ١) ، س > ١ ؛ ٢ ك س + ٦ ، س ≤ ١ }

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة ك

الحل

∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

∴ نهـــا$_{س \to ١^{+}}$ (٢ ك س + ٦) = نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ (س^{١٧} − ١) / (س − ١) + نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ (س^{١٣} − ١) / (س − ١)

∴ ٢ ك + ٦ = ١٧ + ١٣ و منها : ك = ١٢

إذا كانت الدالة د : د (س) = { (س^{ن} − ١) / (س − ١) عندما س > 1 ؛ ٤ س + ١ عندما س ≤ ١ }

متصلة عند س = ١ أوجد قيمة ن

الحل

∵ د (س) متصلة عند س = ١ ∴ د (١) = د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

∴ نهـــا (٤ س + ١) = نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ∴ و منها ر هـ = ٥
س ← ١+ س ← ١-

أبحث إتصال للدالة د : د (س) = { س٢ + ٤ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣ س + ٢ ، ٢ < س < ٥ }

الحل

∵ د (س) = س٢ + ٤ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

، ∵ د (س) كثيرة حدود ∴ د (س) متصلة على [٠ ، ٢] (١)

، ∵ د (س) = ٣ س + ٢ لكل س ∈] ٢ ، ٥ [

، ∵ د (س) كثيرة حدود ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥ [(٢)

، ∵ د (٢) = ٨ ، د (٢+) = نهـــا (٣ س + ٢) = ٨
س ← ٢+

، د (٢-) = نهـــا (س٢ + ٤) = ٨
س ← ٢-

∴ د (٢) = د (٢+) = د (٢-) ∴ د (س) متصلة عند س = ٢ (٣)

، ∵ د (٠) = نهـــا (س٢ + ٤) ∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = ٠ (٤)
س ← ٠+

، ∵ د (٥) = نهـــا (٣ س + ٢) ∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٠ (٥)
س ← ٥-

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ، (٥) ينتج أن : د (س) متصلة على [٠ ، ٥]

إذا كانت الدالة د : د (س) = { ٣ س + ١ ، س ≥ - ١ ؛ ك س + م ، - ١ > س ≥ ٣ ؛ س٢ - ٣ ، س ≤ ٣ }

متصلة على ح أوجد قيمة كل من ك ، م

الحل

∵ د (س) على ح ∴ د (س) عند كل من س = - ١ ، س = ٣

نهـــا (٣ س + ١) = نهـــا (ك س + م) ∴ - ٢ = - ك + م (١)
س ← - ١+ س ← - ١-

، نهـــا (س٢ - ٣) = نهـــا (ك س + م) ∴ ٦ = ٣ ك + م (٢)
س ← ٣+ س ← ٣-

من (١) ، (٢) ينتج : ك = ٢ ، م = ٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = { ك س + ٧ ، س ≥ - ١ ؛ س٢ + م ، - ١ > س ≥ ٢ ؛ ٣ س + ك ، س ≤ ٢ }

متصلة على ح أوجد قيمة كل من ك ، م

الحل

∵ د (س) على ح ∴ د (س) عند كل من س = - ١ ، س = ٢

نهـــا (س٢ + م) = نهـــا (ك س + ٧) ∴ م + ك = ٦ (١)
س ← - ١+ س ← - ١-

، نهـــا (٣ س + ك) = نهـــا (س٢ + م) ∴ م - ك = ٢ (٢)
س ← ٢+ س ← ٢-

من (١) ، (٢) ينتج : ك = ٢ ، م = ٤

إذا كانت الدالة د : د (س) = { $\frac{طا ٢ س}{لو_{٢} (٨)^{س}}$ ، س ≥ 0 ؛ س + ك ، س < ٠ }

متصلة على ح أوجد قيمة ك

الحل

∵ د (س) على ح ∴ د (س) عند س = ٠

نهـــا (س + ك) = نهـــا $\frac{طا ٢ س}{لو_{٢} (٨)^{س}}$
س ← ٠+ س ← ٠-

∴ ك = نهـــا $\frac{طا ٢ س}{لو_{٢} (٨)^{٣ س}}$ = نهـــا $\frac{طا ٢ س}{٣ س لو_{٢}}$ = نهـــا $\frac{طا ٢ س}{٣ س}$
س ← ٠- س ← ٠- س ← ٠-

∴ ك = $\frac{٢}{٣}$

الإشتقاق

** قواعد الإشتقاق (تطبق فقط على الدوال القابلة للإشتقاق)

* إذا كانت الدالة ص = د (س) = ك " ثابت "
فإن : د/ (س) " $\frac{ع ص}{ع س}$ " = صفر

* إذا كانت : د (س) = $س^{ن}$ " ن $\in$ ح " فإن : د/ (س) = ن $س^{ن-١}$

* الحالات المختلفة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س^{ن}}$ فإن : د/ (س) = $\frac{-ن}{س^{ن+١}}$

(٢) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ك]{س^{م}}$ فإن :

(أ) إذا كان : ك > م فإن : د/ (س) = $\frac{م}{ك \sqrt[ك]{س^{ك-م}}}$

(ب) إذا كان : ك > م فإن : د/ (س) = $\frac{ك \sqrt[ك]{س^{ك-م}}}{م}$

حالة خاصة :

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ فإن : د/ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

* إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

(١) $\frac{ع}{ع س}$ (د ٠ ر) = : د ٠ ر/ + د/ ٠ ر

(٢) $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{د}{ر}$) = $\frac{د/ ٠ ر - د ٠ ر/}{ر^{٢}}$ حيث ر (س) $\neq$ ٠

* إذا كانت : د (س) = حا س فإن : د/ (س) = حتا س
* إذا كانت : د (س) = حتا س فإن : د/ (س) = ـ حا س
* إذا كانت : د (س) = طا س فإن : د/ (س) = $قا^{٢}$ س
* إذا كانت : د (س) = حا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = حتا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = حتا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = ـ حا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = طا (أ س + ب) فإن : د/ (س) = $قا^{٢}$ (أ س + ب)

حيث : أ ، ب ثابتان

** قابلية الإشتقاق

الدالة د (س) تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ إذا كان : د/ ($أ^{+}$) = د/ ($أ^{-}$)

أما إذا كان : د/ ($أ^{+}$) $\neq$ د/ ($أ^{-}$) فإنها غير قابلة للإشتقاق عند س = أ حيث :

* د/ ($أ^{+}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$
* د/ ($أ^{-}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$

* ملاحظات :

* لبحث قابلية الإشتقاق يجب إيجاد د/ ($أ^{+}$) ، د/ ($أ^{-}$) و المقارنة بينهما
أما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق فتشتق الدالة بإستخدام قواعد الإشتقاق مباشرة
* إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند س = أ و العكس غير صحيح
* إذا كانت الدالة د (س) غير متصلة عند س = أ فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عند س = أ
* إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فلبحث قابلية الإشتقاق فى هذه الفترة :

(١) نبحث قابلية الإشتقاق على] أ ، ب [
(٢) يكتفى ببحث المشتقة اليمنى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت
(٣) يكتفى ببحث المشتقة اليسرى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت

** المشتقات العليا للدالة

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* المشتقة الأولى لها دالة فى س و هى : ص/ أو د/ (س)

أو $\frac{ع ص}{ع س}$ " معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س "

* المشتقة الثانية لها دالة فى س و هى : $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{ع ص}{ع س}$) أو ص//

أو د// (س) أو $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$

* المشتقة الثالثة لها دالة فى س و هى : $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$) أو ص///

أو د/// (س) أو $\frac{ع^{٣} ص}{ع س^{٣}}$ ..... و هكذا

** الإشتقاق الضمنى

* الدالة الضمنية هى دالة على الصورة : د (س ، ص) = ٠

و الإشتقاق فى هذه الحالة يسمى إشتقاق ضمنى

* إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ع} \times \frac{ع ع}{ع س}$ ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = \frac{ع}{ع س}$ ($\frac{ع ص}{ع س}$)

* ملاحظات :

* إذا كانت : ص = [د (س)]ن فإن : $\frac{ع ص}{ع س}$ = ن [د (س)]ن-١ × د/ (س)

* إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{ع}{ع س}$ (ص)ن = ن (ص)ن-١ × $\frac{ع ص}{ع س}$

* إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ع ص}{ع ع} = \frac{ع ص}{ع س} \times \frac{ع س}{ع ع}$ ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع ع^{٢}} = \frac{ع}{ع س}$ ($\frac{ع ص}{ع ع}$) × $\frac{ع س}{ع ع}$

تمارين محلولة

ابحث قابلية الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س < ١ \\ ٥ س - ٩ & ، ١ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢} - س & ، س > ٣ \end{cases}$

للإشتقاق عند كل من : (١) س = ١ ، (٢) س = ٣

الحل

(١) ∵ د (١) = ٥ × ١ ـ ٩ = ٤

، عند س < ١ فإن : د (١ + هـ) ـ د (١) = ٥ (١ + هـ) ـ ٩ ـ ٤ = ٥ هـ

∴ د/ (١+) = نهـ $\frac{٥ هـ}{هـ}$ = نهـ ٥ = ٥
هـ ← ٠+ هـ ← ٠+

، عند س > ١ فإن : د (١ + هـ) ـ د (١) = (١ + هـ)٢ + ٣ ـ ٤ = ٢ هـ + هـ٢

∴ د/ (١-) = نهـ $\frac{٢ هـ + هـ^{٢}}{هـ}$ = نهـ (٢ + هـ) = ٢
هـ ← ٠- هـ ← ٠-

، ∵ د/ (١+) ≠ د/ (١-) ∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ١

(٢) ∵ د (٣) = ٩ ـ ٣ = ٦

، عند س > ٣ فإن : د (٣ + هـ) ـ د (٣) = (٣ + هـ)٢ ـ (٣ + هـ) ـ ٦
= ٥ هـ + هـ٢

∴ د/ (٣+) = نهـ $\frac{٥هـ + هـ^{٢}}{هـ}$ = نهـ (٥ + هـ) = ٥
هـ ← ٠+ هـ ← ٠+

، عند س > ٣ فإن : د (٣ + هـ) ـ د (٣) = ٥ (١ + هـ) ـ ٦ = ٥ هـ

∴ د/ (٣-) = نهـ $\frac{٥ هـ}{هـ}$ = نهـ ٥ = ٥
هـ ← ٠+ هـ ← ٠+

، ∵ د/ (٣+) = د/ (٣-) = ٥

∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ٣ ، د/ (٣) = ٥

إذا كانت الدالة د : د (س) = { س^{٢} – ل ، س ≤ ١ ; ٢ ل س + م ، س > ١ }

قابلة للإشتقاق عند س = ١ أوجد قيمة كل من ل ، م

الحل

∵ د (س) قابلة للإشتقاق عند س = ١ ∴ د (س) متصلة عند س = ١

∴ د (١ $^{-}$) = د (١ $^{+}$) ∴ ٢ ل + م = ١ – ل

∴ ٣ ل + م = ١ (١)

د$^{/}$ (س) = { ٢ س ، س < ١ ; ٢ ل ، س > ١ }

∵ د$^{/}$ (١ $^{+}$) = د$^{/}$ (١ $^{-}$) ∴ ٢ ل = ٢ ∴ ل = ١

بالتعويض فى (١) ينتج : م = – ٢

إذا كان للدالة د : د (س) = { ل س^{٣} – ١ ، س ≥ ١ ; م س^{٣} / | س | + ن س ، س < ١ }

قابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ أوجد قيمة كل من : ل ، م

الحل

د (س) = { ل س^{٣} – ١ ، س ≥ ١ ; م س^{٢} + ن س ، س > ١ }

∵ د (س) قابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ ∴ د (١ $^{+}$) = د (١ $^{-}$)

∴ ل – ١ = م + ن (١)

د$^{/}$ (س) = { ٣ ل س^{٢} ، س > ١ ; ٢ م س + ن ، س < ١ } ، د$^{//}$ (س) = { ٦ ل س ، س > ١ ; ٢ م ، س < ١ }

∵ د$^{/}$ (١ $^{+}$) = د$^{/}$ (١ $^{-}$) ∴ ٣ ل = ٢ م + ن (٢)

∵ د$^{//}$ (١ $^{+}$) = د$^{//}$ (١ $^{-}$) ∴ ٦ ل = ٢ م (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : ل = ١ ، م = ٣ ، ن = – ٣

إذا كانت الدالة د : د (س) = { ل س^{٢} + ل س + ن ، س ≤ ٢ ; ٧ س – ن ، س > ٢ }

قابلة للإشتقاق عند س = ٢ ، و متوسط تغيرها عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٦,٥

الحل

∵ د (س) قابلة للإشتقاق عند س = ٢ ∴ د (س) متصلة عند س = ٢

∴ د (٢ $^{+}$) = د (٢ $^{-}$) = ٠ ∴ ٢ ل + ل + ن = ٧ (١)

د$^{/}$ (س) = { ٢ ل س + ل ، س < ٢ ; ٧ ، س > ٢ }

∵ د$^{/}$ (٢ $^{+}$) = د$^{/}$ (٢ $^{-}$) ∴ ٤ ل + ل = ٧ (٢)

∵ متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٦,٥

∴ د (٣) – د (١) = ٧ × ٣ – ن – (ل + ل + ن) = ٢١ – ٢ ن – ل

∴ ½ (٢١ – ٢ ن – ل) = ١٣/٢ ∴ ٢ ن + ل = ٨ (٣)

من (٢) ، (٣) ينتج : ٣ ل + ل = ٤ (٤)

∴ من (١) ، (٤) ينتج : ل = ١ ، ل = ٣ ، من (١) ينتج : ن = ٢

إذا كان : ص = س^{٣} + ٢ ، ع = س^{٢} + ٣ أوجد ع^{٢} / ع ص عندما س = ٢

الحل

ع ص / ع س = ٣ س^{٢} ∴ ع س / ع ص = ١ / ٣ س^{٢} ، ع س / ع ع = ٢ س

∴ ع ع / ع ص = ع ع / ع س × ع س / ع ص = ٢ س / ٣ س^{٢} = ٢ / ٣ س

$\frac{ع^{٢}ص}{ع ع^{٣}} = \frac{ع}{ع س}\left(\frac{٢}{٣ س}\right) \cdot \frac{ع ص}{ع س} = -\frac{٢}{٣ س^{٢}} \times \frac{١}{٣ س^{٢}}$

$\therefore$ س = ٢ فإن : $\frac{ع^{٢}ص}{ع ع^{٣}} = -\frac{١}{٧٢}$

= = = = = = = = = = = = = = = = = = = =

حل آخـــــــر

$\because$ ص = $س^{٣}$ + ٢ $\therefore$ عندما س = ٢ فإن : ص = ١٠

، $س = (ص - ٢)^{\frac{١}{٣}}$ $\therefore$ $ع = (ص - ٢)^{\frac{٤}{٣}} + ٣$

$\therefore \frac{ع ع}{ع ص} = \frac{٤}{٣}(ص - ٢)^{-\frac{١}{٣}}$ ، $\frac{ع^{٢}ص}{ع ع^{٣}} = -\frac{٤}{٩}(ص - ٢)^{-\frac{٤}{٣}}$

، عندما ص = ١٠ فإن : $\frac{ع^{٢}ص}{ع ع^{٣}} = -\frac{١}{٧٢}$

إذا كان : $س^{م}ص^{ن} = ١$ حيث م ، ن ثوابت

أثبت أن : $\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٣}} = \frac{م ص (م + ن)}{ن^{٢} س^{٢}}$

الحلـــــــــل

$\because$ $س^{م}ص^{ن} = ١$ ، بالإشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $س^{م} \times ن ص^{ن-١}\frac{ع ص}{ع س} + م س^{م-١} \times ص^{ن} = ٠$

بالقسمة على $س^{م-١} \times ص^{ن-١}$ ينتج :

$\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{م ص}{ن س}$ (١) ، بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٣}} = \frac{ن س (م \frac{ع ص}{ع س}) - م ص ن}{ن^{٢} س^{٢}}$ بالتعويض من (١) ينتج :

$\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٣}} = \frac{م ص (م + ن)}{ن^{٢} س^{٢}}$

إذا كان : $س^{م}ص^{ن} = (س + ص)^{م+ن}$ حيث م ، ن ثوابت

أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ص}{س}$

الحلـــــــــل

$\because$ $س^{م}ص^{ن} = (س + ص)^{م+ن}$ بالإشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore$ $س^{م} \times م ص^{م-١}\frac{ع ص}{ع س} + ن س^{ن-١} \times ص^{م}$

$= (م + ن)(س + ص)^{م+ن-١}(١ + \frac{ع ص}{ع س})$

بقسمة الطرفين على : $س^{م}ص^{ن} = (س + ص)^{م+ن}$ ينتج :

$\frac{م}{ص} \times \frac{ع ص}{ع س} + \frac{ن}{س} = \frac{م + ن}{س + ص} + \frac{م + ن}{س + ص} \times \frac{ع ص}{ع س}$

$\therefore (\frac{م}{ص} - \frac{م + ن}{س + ص})\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ن}{س} - \frac{م + ن}{س + ص}$

$\therefore (\frac{م س + ن ص - م ص - ن ص}{ص (س + ص)})\frac{ع ص}{ع س} = \frac{م س + ن س - ن س - ن ص}{س (س + ص)}$

ومنها ينتج : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ص}{س}$

إذا كانت : $ص = (س + \sqrt{١ + س^{٢}})^{٥}$ أثبت أن :

$(١ + س^{٢})\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}} + س \frac{ع ص}{ع س} - ٢٥ ص = ٠$

الحلـــــــــل

$\frac{ع ص}{ع س} = (س + \sqrt{١ + س^{٢}})^{٤}(١ + \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}})$

بالإختصار و التعويض ينتج :

$٥ ص = (\sqrt{١ + س^{٢}})\frac{ع ص}{ع س}$ بالتربيع ينتج :

$٢٥ ص^{٢} = (١ + س^{٢})(\frac{ع ص}{ع س})^{٢}$ بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$٥٠ ص \frac{ع ص}{ع س} = ٢ س (\frac{ع ص}{ع س})^{٢} + ٢ \frac{ع ص}{ع س} \frac{ع^{٢} ص}{ع س} (١ + س^{٢})$

و منها بالقسمة على ٢ $\frac{ع ص}{ع س}$ ينتج :

$(١ + س^{٢}) \frac{ع^{٢} ص}{ع س} + س \frac{ع ص}{ع س} - ٢٥ ص = ٠$

إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) أثبت أن :

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س} = \frac{ع^{٢} ص}{ع ع} \times (\frac{ع ع}{ع س})^{٢} + \frac{ع^{٢} ع}{ع س} \times \frac{ع ص}{ع ع}$

الحل

∵ ص = د (س) ، ع = ر (س) بالإشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ع} \times \frac{ع ع}{ع س}$

$، \frac{ع^{٢} ص}{ع س} = \frac{ع^{٢} ص}{ع ع} \frac{ع ع}{ع س} \times \frac{ع ع}{ع س} + \frac{ع ص}{ع ع} \times \frac{ع^{٢} ع}{ع س}$

$\therefore \frac{ع^{٢} ص}{ع س} = \frac{ع^{٢} ص}{ع ع} \times (\frac{ع ع}{ع س})^{٢} + \frac{ع^{٢} ع}{ع س} \times \frac{ع ص}{ع ع}$

إذا كانت : د (س) = $\frac{ق (س)}{ر (س)}$ حيث ق (س) ، ر (س) دالتان قابلتان

بالإشتقاق بالنسبة عند س = ك ، د / (ك) = ٠ أثبت أن : د (ك) = $\frac{ق / (ك)}{ر / (ك)}$

الحل

$د / (س) = \frac{ر (س) ٠ ق / (س) - ق (س) ٠ ر / (س)}{[ر (س)]^{٢}}$

$د / (ك) = \frac{ر (ك) ٠ ق / (ك) - ق (ك) ٠ ر / (ك)}{[ر (ك)]^{٢}}$

∵ د / (ك) = ٠ ∴ ر (ك) ٠ ق / (ك) = ق (ك) ٠ ر / (ك)

∴ $\frac{ق / (ك)}{ر / (ك)} = \frac{ق (ك)}{ر (ك)}$ ∴ د (ك) = $\frac{ق / (ك)}{ر / (ك)}$

أوجد معدل تغير $\sqrt{٨ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س + ١}$ عندما س = ١

الحل

نفرض أن : ص = $\sqrt{٨ + س^{٢}}$ ، ع = $\frac{س}{س + ١}$

∴ المطلوب إيجاد $\frac{ع ص}{ع ع}$ عندما س = ١

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{س}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$ ، $\frac{ع ع}{ع س} = \frac{١}{(س + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{ع ص}{ع ع} = \frac{س (س + ١)^{٢}}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$ ، عندما س = ١ يكون : $\frac{ع ص}{ع ع} = \frac{٤}{٣}$

إذا كان : $\frac{ع ع}{ع س} = ١ + ٢ س$ ، $\frac{ع ص}{ع س} = س^{٢} + ٣$ أوجد $\frac{ع^{٢} ع}{ع ص}$ عندما س = ١

الحل

$\frac{ع ع}{ع ص} = \frac{ع س}{ع ص} \times \frac{ع ع}{ع س} = \frac{١ + ٢ س}{س^{٢} + ٣}$

$، \frac{ع^{٢} ع}{ع س} = \frac{ع}{ع س} (\frac{ع ع}{ع ص}) \times \frac{ع س}{ع ص} = \frac{ع}{ع س} (\frac{١ + ٢ س}{س^{٢} + ٣}) \times \frac{ع س}{ع ص}$

$= \frac{(س^{٢} + ٣) \times ٢ - (١ + ٢ س) \times ٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}} \times \frac{١}{س^{٢} + ٣}$

، عندما س = ١

فإن : $\frac{ع^{٢} ع}{ع س} = \frac{١}{٣٢}$

إذا كانت : ص = حتا ٢ س أثبت أن : $(\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}})^{٢} + ٤ (\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}})^{٢} = ١٦$

الحل

$\frac{ع ص}{ع س} = - ٢$ حا ٢ س ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = - ٤$ حتا ٢ س

∴ الطرف الأيمن = $(\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}})^{٢} + ٤ (\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}})^{٢}$

= ١٦ حتا^{٢} ٢ س + ١٦ حا^{٢} ٢ س

= ١٦ (حتا^{٢} ٢ س + حتا^{٢} ٢ س) = ١٦

إذا كانت : ص = س حتا س − حا س أوجد $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ عندما س = $\frac{ط}{٢}$

الحل

$\frac{ع ص}{ع س} = -$ س حا س + حتا س ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = -$ س حتا س − حتا س

عندما س = $\frac{ط}{٢}$ فإن : $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٠ - ١ = - ١$

إذا كانت : ص = ل س^{٣} + م س^{٢} ، وكان : $\frac{ع^{٣} ص}{ع س^{٣}} = ١٢$

، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٦$ عندما س = ١ أوجد قيمة كل من : ل ، م

الحل

$\frac{ع ص}{ع س} = ٣$ ل س^{٢} + ٢ م س ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٦$ ل س + ٢ م

، $\frac{ع^{٣} ص}{ع س^{٣}} = ٦$ ل ∴ ٦ ل = ١٢ و منها : ل = ٢

∵ ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٦$ عندما س = ١

∴ ٦ ل + ٢ م = ٦ ∴ ١٢ + ٢ م = ٦

و منها : م = − ٣

إذا كانت : د$''$ (س) + د$'$ (س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٢

أوجد د$'$ (س)

الحل

∵ د$''$ (س) + د$'$ (س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٢

∴ د (س) دالة من الدرجة الرابعة

نفرض أن : د (س) = ل س^{٤} + م س^{٣} + ل س^{٢} + ﻫ س + ء

∴ د$'$ (س) = ٤ ل س^{٣} + ٣ م س^{٢} + ٢ ل س + ﻫ

، د$''$ (س) = ١٢ ل س^{٢} + ٦ م س + ٢ ل

∴ د$''$ (س) + د$'$ (س) = ٤ ل س^{٣} + (١٢ ل + ٣ م) س^{٢}

+ (٦ م + ٢ ل) س + (٢ ل + ﻫ)

، ∵ د$''$ (س) + د$'$ (س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٢

∴ ٤ ل = ١ و منها : ل = $\frac{١}{٤}$

، ١٢ ل + ٣ م = ٥ و منها : م = $\frac{٢}{٣}$

، ٦ م + ٢ ل = ١ و منها : ل = $\frac{- ٣}{٢}$

، ٢ ل + ﻫ = ٢ و منها : ﻫ = ٥

تطبيقات هندسية على المشتقة الأولى

* طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو : م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + حـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : م = $-\frac{أ}{ب}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = طا هـ

و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة الإتجاه الموجب لمحور مع السينات

، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ملاحظة :

إذا كان : م١ ، م٢ ميلا المستقيمان ل١ ، ل٢ فإن :

ل١ // ل٢ إذا كان : م١ = م٢ ، ل١ ⊥ ل٢ إذا كان : م١ × م٢ = - ١

* قواعد عامة

(١) أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته

(٢) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً

(٣) ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٤) العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٥) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٦) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين ، إذا كان قياس الزاوية بين المماسيين لمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين قائمة كان المنحنيان متقاطعيين على التعامد

* إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس لمنحنى و العمودى عليه

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = [ص/](س١ ، ص١)

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = $\frac{١}{[\ ص/\ ]_{(س_١ ، ص_١)}}$

(٣) المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه يصنع زاوية قياسها هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

طا هـ = [ص/](س١ ، ص١)

و يكون : [ص/](س١ ، ص١)

= صفر إذا كان المماس يوازى محور السينات

> ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

< ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

غير معرف ($\frac{١}{٠}$) إذا كان المماس يوازى محور الصادات

* معادلتا المماس لمنحنى و العمودى عليه :

(١) معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) هى :

ص - ص١ = م (س - س١) حيث : م = [ص/](س١ ، ص١)

(٢) معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) هى :

ص - ص١ = $\frac{١}{م}$ (س - س١) حيث : م = [ص/](س١ ، ص١)

تمارين محلولة

أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ و التى يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم $ص = ٤ - س$

الحل

$٢ س + ٢ ص ص' = ٠$ ∴ $ص' = - \frac{س}{ص}$ (١)

∵ ميل المستقيم $= -١$ ∴ ميل المماس ($\perp$ المستقيم) $= ١$

∴ من (١) ينتج : $ص = - س$

من معادلة المنحنى ينتج : $س^{٢} = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$ ، $ص = \mp ٢$

∴ النقط هى : $(٢ ، -٢)$ ، $(-٢ ، ٢)$

إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص^{٢} = س - ١$ يساوى $-\frac{١}{٢}$ أوجد معادلة هذا المماس

الحل

∵ $٢ ص ص' = ١$ ∴ $ص' = \frac{١}{٢ ص}$ ، ∵ $ص' = -\frac{١}{٢}$

∴ $ص = -١$ ∴ $س = ٢$

∴ معادلة المماس هى : $ص + ١ = -\frac{١}{٢} (س - ٢)$

أى : $س + ٢ ص = ٠$

أوجد معادلة كل من المماس و العمودى عليه للمنحنى $س^{٢} - ٢ س ص - ص^{٢} = ١$ عند النقطة $(١ ، ٠)$

الحل

∵ $٢ س - ٢ ص - ٢ س ص' - ٢ ص ص' = ٠$ ∴ $ص' = \frac{س - ص}{س + ص}$

، عند النقطة $(١ ، ٠)$: ميل المماس $= ١$ ، ميل العمودى عليه $= -١$

∴ معادلة المماس هى : $ص = س - ١$

، معادلة العمودى عليه هى : $ص = - س + ١$

أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣}$ و التى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة $(٤ ، ٠)$

الحل

النقط الواقعة على المنحنى و تحقق معادلته تكون على الصورة $(ك ، ك^{٣})$

، ∵ $ص = س^{٣}$ ∴ ميل المماس $= \frac{ك^{٣}}{ك - ٤}$

، $ص' = ٣ س^{٢}$ ∴ ميل المماس عند $(ك ، ك^{٣}) = ٣ ك^{٢}$

∴ $\frac{ك^{٣}}{ك - ٤} = ٣ ك^{٢}$ و منها : $٢ ك^{٢} (ك - ٦) = ٠$

∴ $ك = ٠$ ، $ك = ٦$ ∴ النقط هى $(٠ ، ٠)$ ، $(٦ ، ٢١٦)$

أثبت أن : المماس لمنحنى الدالة $ص = س | س - ٣ س |$ عند النقطة $س = ٢$ يوازى العمودى على المنحنى عند النقطة $س = -١$ و أوجد معادلة كل منهما

الحل

عند : $س = ٢$ فإن : $ص = س^{٢} - ٣ س$

∴ $ص = -٢$ ، $ص' = ٢ س - ٣$

∴ ميل المماس $= ١$

، عند : $س = -١$ فإن : $ص = - س^{٢} - ٣ س$

∴ $ص = ٤$ ، $ص' = -٢ س - ٣$

∴ ميل المماس $= -١$ ∴ ميل العمودى $= ١$

∴ المماس للمنحنى عند النقطة $س = ٢$ يوازى العمودى على المنحنى عند النقطة $س = -١$

، معادلة المماس للمنحنى عند $س = ٢$ هى :

$ص + ٢ = س - ٢$ أى : $س - ص - ٤ = ٠$

، معادلة العمودى على المنحنى عند $س = -١$ هى :

$ص + ٤ = س + ١$ أى : $س - ص + ٣ = ٠$

أوجد قيم ل ، ل ، ر حتى يكون لمنحنين الدالتين : ص = ل س^{٣} + ل س
، ص = ر س^{٢} – س مماس مشترك عند النقطة (– ١ ، ٢) و أوجد معادلته

الحل

بالنسبة للمنحنى الأول : ∵ (– ١ ، ٢) تقع عليه ∴ ٢ = – ل – ل (١)
، ص$^{/}$ = ٣ ل س^{٢} + ل ∴ ميل المماس له = ٣ ل + ل
بالنسبة للمنحنى الثانى : ∵ (– ١ ، ٢) تقع عليه ∴ ٢ = ر + ١ ∴ ر = ١
، ص$^{/}$ = ٢ ر س – ١ ∴ ميل المماس له = – ٢ ر – ١
∵ ر = ١ ∴ ميل المماس له " المماس المشترك " = – ٣
، ∵ المماس مشترك عند (– ١ ، ٢) ∴ ٣ ل + ل = – ٣ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ل = – $\frac{١}{٢}$ ، ل = – $\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المماس المشترك هى :
ص – ٢ = – ٣ (س + ١) أى : ٣ س + ص + ١ = ٠

أثبت أن : المنحنيين ص = س^{٢} ، ص = ١ – $\frac{١}{٣}$ س^{٢} متقاطعين على التعامد
(المماسات متعامدة)

الحل

نوجد نقط التقاطع بحل معادلتى المنحنيين معاً ∴ س^{٢} = ١ – $\frac{١}{٣}$ س^{٢}
و منها س^{٢} = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
∵ للمنحى الأول : ص$^{/}$ = ٢ س ، للمنحنى الثانى : ص$^{/}$ = – $\frac{٢}{٣}$ س
∴ عند س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، م$_{١}$ = $\sqrt{٣}$ ، م$_{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
، عند س = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، م$_{١}$ = – $\sqrt{٣}$ ، م$_{٢}$ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
، ∵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = – ١ عند س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
∴ المنحنيين متقاطعين على التعامد

أوجد قيم ل ، ل ، ر الحقيقية حتى يكون المنحنيين ص = ل س^{٢} ، ص = ل – ر س^{٢}
متقاطعين على التعامد عند النقطة ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

الحل

∵ للمنحى الأول : ص$^{/}$ = ٢ ل س ، للمنحنى الثانى : ص$^{/}$ = – ٢ ر س
∴ عند س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ م$_{١}$ = $\sqrt{٣}$ ل ، م$_{٢}$ = – $\sqrt{٣}$ ر
، ∵ المنحنيين متقاطعين على التعامد عند النقطة ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$) ، م$_{١}$ × م$_{٢}$ = – ١
∴ $\sqrt{٣}$ ل × – $\sqrt{٣}$ ر = – ١ ∴ ٣ ل ر = ١
، $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ل ∴ ل = ١ ، ر = $\frac{١}{٣}$
، $\frac{٣}{٤}$ = ل – $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٣}{٤}$ و منها : ل = ١

أوجد معادلتى المماسيين للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٥ و الذى كل منهما يميل على المحور السينى الموجب بزاوية طلها يساوى ٢

الحل

∵ ٢ س + ٢ ص ص$^{/}$ = ٠ ∴ ص$^{/}$ = – $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (١)
، ∵ المماسان يميلان على المحور السينى الموجب بزاوية طلها يساوى ٢
∴ ص$^{/}$ = ٢ ∴ من (١) ينتج : س = – ٢ ص
، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج : ص = ١ ، ص = – ١
∴ المماس الأول يمر بالنقطة (– ٢ ، ١) ، المماس الثانى يمر بالنقطة (٢ ، – ١)
∴ معادلة المماس الأول هى :
ص – ١ = ٢ (س + ٢) أى : ٢ س – ص + ٥ = ٠
، معادلة المماس الثانى هى :
ص + ١ = ٢ (س – ٢) أى : ٢ س – ص – ٥ = ٠

أوجد معادلة المماس الذى يمر بالنقطة (١ ، – ٤) و يمس المنحنى ص = س^{٢} – س

الحل

نفرض أن نقطة التماس هى (ك ، ر) ∴ المنحنى يمر بها

∴ ر = ك^{٢} – ك (١)

، ∵ ص$'$ = ٢ س – ١ ∴ ميل المماس = ٢ ك – ١

∴ معادلة المماس هى : ص – ر = (٢ ك – ١) (س – ك) (٢)

، ∵ المماس يمر بالنقطة (١ ، – ٤) ∴ – ٤ – ر = (٢ ك – ١) (١ – ك)

، بالتعويض من (١) ينتج : – ٤ – ك^{٢} + ك = – ٢ ك^{٢} + ٣ ك – ١

أى : ك^{٢} – ٢ ك – ٣ = ٠ و منها ينتج : ك = – ١ أو ك = ٣

، بالتعويض فى (١) ينتج : ر = ٢ أو ر = ٦

، بالتعويض فى (٢) ينتج أن معادلة الماس هى :

٥ س – ص – ٩ = ٠ أو ٣ س + ص + ١ = ٠

إذا كان العمودى للمنحنى ص = ٤ – س^{٢} عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند النقطة ك أوجد معادلة المماس عند النقطة ك

الحل

ص$'$ = – ٢ س ∴ ميل العمودى عند النقطة (١ ، ٣) = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى : س = ٢ ص – ٥ ، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج :

ص = ٤ – (٢ ص – ٥)^{٢} و منها : (٤ ص – ٧) (ص – ٣) = ٠

أى أن : ص = $\frac{٧}{٤}$ ، ص = ٣ " هى النقطة المعطاه "

∴ س = ٢ × $\frac{٧}{٤}$ – ٥ = – $\frac{٣}{٢}$ ∴ ك = (– $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٤}$)

∴ ميل المماس عند ك = – ٢ × – $\frac{٣}{٢}$ = ٣

∴ معادلة المماس عند النقطة ك هى :

ص – $\frac{٧}{٤}$ = ٣ (س + $\frac{٣}{٢}$) أى : ١٢ س – ٤ ص + ٢٥ = ٠

أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات و المماس و العمودى عند النقطة (– ١ ، ٢) للمنحنى ٤ ص = ٩ – س^{٢}

الحل

٤ ص$'$ = – ٢ س ∴ ص$'$ = – $\frac{١}{٢}$ س ∴ ميل المماس عند ك (– ١ ، ٢) = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هى : ص – ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س + ١) أى : س – ٢ ص + ٥ = ٠

، معادلة المماس هى : ص – ٢ = – ٢ (س + ١) أى : ٢ س + ص = ٠

لإيجاد نقط تقاطع المماس و العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ نقط تقاطع المماس و العمودى مع محور السينات هى :

ك (– ٥ ، ٠) ، ر (٠ ، ٠) على الترتيب

∴ (ك ك)^{٢} = (– ٥ – ١)^{٢} + (٠ – ٢)^{٢} = $\sqrt{٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٥}$

، (ك ر)^{٢} = (٠ – ١)^{٢} + (٠ – ٢)^{٢} = $\sqrt{٥}$

∴ مساحة المثلث ك ر ك " المكون من محور السينات و المماس و العمودى "

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ $\sqrt{٥}$ × $\sqrt{٥}$ = ٥ وحدة مساحة

نقطة تتحرك على المنحنى ص = س^{٢} – ٥ س أوجد موقع هذه النقطة عند اللحظة التى يصنع فيها المماس و العمودى عليه مع محور السينات مثلث متساوى الساقين

الحل

ص$'$ = ٢ س – ٥

∴ المماس و العمودى عليه يصنعان مع محور السينات مثلث متساوى الساقين و قائم الزاوية

∴ ميلا المماس و العمودى = ± ١ ∴ ص$'$ = ± ١

∴ ٢ س – ٥ = ١ أو ٢ س – ٥ = – ١

∴ س = ٣ ، ص = – ٦ أو س = ٢ ، ص = – ٦

∴ النقط هى (٣ ، – ٦) أو (٢ ، – ٦)

أوجد النقطة الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ص = ـ س^{٢} و المستقيم المار بنقطة التماس مثلث متساوى الأضلاع

الحل

ص$'$ = ـ ٢ س (١)

∵ المماسان المرسومان من النقطة المطلوبة و المستقيم المار بنقطة التماس يصنعان مثلث متساوى الأضلاع

∴ فهما يصنعان مع المحور السينى الموجب زاويتين قياسيهما ٦٠° ، ١٢٠°

∴ ص$'$ = ± $\sqrt{٣}$

عندما : ص$'$ = $\sqrt{٣}$ ∴ من (١) ينتج : ـ ٢ س = $\sqrt{٣}$

∴ س = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ من معادلة المنحنى ينتج : ص = ـ $\frac{٣}{٤}$

عندما : ص$'$ = ـ $\sqrt{٣}$ ∴ من (١) ينتج : ـ ٢ س = ـ $\sqrt{٣}$

∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ من معادلة المنحنى ينتج : ص = ـ $\frac{٣}{٤}$

∴ النقط هى : (ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ـ $\frac{٣}{٤}$) ، ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ـ $\frac{٣}{٤}$)

أوجد معادلتى المماس و العمودى عليه للمنحنى ص = حا ٢ س ـ حتا ٤ س

عند س = $\frac{١}{٤}$ ط

الحل

عند س = $\frac{١}{٤}$ ط فإن : ص = حا $\frac{١}{٢}$ ط ـ حتا ط = ٢

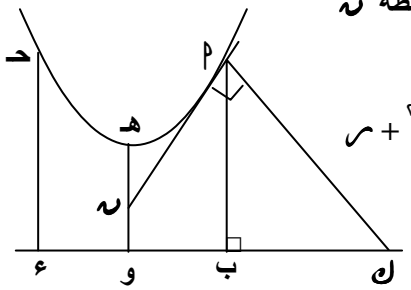
∴ النقطة هى : ($\frac{١}{٤}$ ط ، ٢)

∵ ص$'$ = ٢ حتا ٢ س + ٤ حتا ٤ س

∴ ميل المماس = ٢ حتا $\frac{١}{٢}$ ط + ٤ حتا ط = صفر

∴ معادلة المماس هى : ص ـ ٢ = ٠ ، معادلة العمودى هى : س ـ $\frac{١}{٤}$ ط = ٠

علق سلك كهربائى بين حاملين رأسيين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ إرتفاع كل منهما ٣٠ م ، و المسافة بينهما ٣٦ م فى نفس المستوى الأفقى بحيث يصنع السلك شكلاً لدالة تربيعية فإذا ربط الحامل $\overline{أ ب}$ بسلك مشدود عمودياً على منحنى السلك الكهربائى عند أ ، و ربط الطرف الآخر عند ل ، ب ، ء على إستقامة واحدة و كان أقل إرتفاع لسلك الكهرباء عن سطح الأرض ١٨ م أوجد طول $\overline{ل ب}$ ، و إذا قطع المماس عند أ $\overline{حـ ء}$ فى نقطة ر أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب و ر



الحل

نفرض أن الدالة التربيعية هى : ص = ل (س + ع)^{٢} + ك

∵ أقل إرتفاع للسلك الكهربائى = ١٨ م

∴ ع = ٠ ، ك = ١٨

∴ ص = ل س^{٢} + ١٨ (١)

∵ إرتفاع الحاملين ٣٠ م

∴ أ = (١٨ ، ٣٠) بالتعويض فى (١) ينتج :

٣٠ = ل × ١٨ × ١٨ + ١٨ و منها : ل = $\frac{١}{٢٧}$

∴ ص = $\frac{١}{٢٧}$ س^{٢} + ١٨ ∴ ص$'$ = $\frac{٢}{٢٧}$ س

عند أ = (١٨ ، ٣٠) يكون ميل المماس = $\frac{٢}{٢٧}$ × ١٨ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ميل العمودى = ـ $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المماس عند أ هى : ص ـ ٣٠ = $\frac{٤}{٣}$ (س ـ ١٨) أى : ٤ س ـ ٣ ص ـ ١٨ = ٠

عند س = ٠ ينتج : ص = ٦ ∴ و ر = ٦ م

∴ معادلة العمودى عند أ هى :

ص ـ ٣٠ = ـ $\frac{٣}{٤}$ (س ـ ١٨) أى : ٣ س + ٤ ص ـ ١٧٤ = ٠

عند ص = ٠ ينتج : س = ٥٨ ∴ و ل = ٥٨ م

∴ ب ل = ٥٨ ـ ١٨ = ٤٠ م " لأن : و ب = $\frac{١}{٢}$ ب ء = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ "

" لاحظ أن : هـ نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية ، الحاملين على إرتفاعين متساويين "

مساحة شبه المنحرف أ ب و ر = $\frac{١}{٢}$ × (و ر + أ ب) × و ب

= $\frac{١}{٢}$ × (٦ + ٣٠) × ١٨ = ٣٢٤ م^{٢}

المعدلات الزمنية المرتبطة

* إذا كانت : ص = (س) فإن : $\frac{ع ص}{ع س}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س
* إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات مثل : س ، ص ، ع ، ..... بإشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات :

$\frac{ع س}{ع ن}$ ، $\frac{ع ص}{ع ن}$ ، $\frac{ع ع}{ع ن}$

* إذا كان : ص = (س) ، س = ر (ن) فإن :

$\frac{ع ص}{ع ن} = \frac{ع ص}{ع س} \cdot \frac{ع س}{ع ن}$

* خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :
  - تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن
  - إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب
  - اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن
  - التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

* ملاحظات :
  * إذا كان معدل التغير يزداد تكون إشارته موجبة { مثلاً : يتمدد ، يبتعد ، يصب ماء }
  * إذا كان معدل التغير يتناقص تكون إشارته سالبة { مثلاً : يتسرب ، يقترب ، ينزلق }
  * العلاقة الرياضية يمكن أن تكون { محيط ، مساحة ، حجم ، نظرية فيثاغورث ، تشابه مثلثات ، أو علاقة معطاة في السؤال ... }
  * التعويض بالمعطى يكون بعد اشتقاق العلاقة

تمارين محلولة

تتحرك نقطة على المنحنى $س^{٣} + س ص + ص^{٣} = ٥$ بحيث يتزايد إحداثيها الصادى بمعدل ٢ وحدة / ث أوجد معدل تغير إحداثيها السينى عند النقطة (٢ ، – ١)

الحل

$٣ س^{٢} \frac{ع س}{ع ن} + ص \frac{ع س}{ع ن} + س \frac{ع ص}{ع ن} + ٣ ص^{٢} \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$

، $\because \frac{ع ص}{ع ن} = ٢$ عند (٢ ، – ١)

$\therefore ١٢ \frac{ع س}{ع ن} + ٤ - \frac{ع س}{ع ن} + ٦ = ٠$ و منها : $\frac{ع س}{ع ن} = - \frac{١٠}{١١}$ وحدة / ث

تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٥ س – $س^{٣}$ بحيث يتناقص إحداثيها الصادى بمعدل $\frac{١}{٢}$ وحدة / ث أوجد معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عند س = ٣

الحل

$\frac{ع ص}{ع ن} = ٥ \frac{ع س}{ع ن} - ٣ س^{٢} \frac{ع س}{ع ن}$ ، $\because \frac{ع ص}{ع ن} = - \frac{١}{٢}$ عند س = ٣

$\therefore - \frac{١}{٢} = ٥ \frac{ع س}{ع ن} - ٢٧ \frac{ع س}{ع ن}$ و منها : $\frac{ع س}{ع ن} = \frac{١}{٤٤}$ وحدة / ث

، $\because \frac{ع ص}{ع س} = ٥ - ٣ س^{٢}$

، $\frac{ع}{ع ن}(\frac{ع ص}{ع س}) = \frac{ع}{ع س}(\frac{ع ص}{ع س}) \frac{ع س}{ع ن} = - ٦ س \times \frac{ع س}{ع ن}$

$\therefore$ معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عند (س = ٣) $= - ٦ \times ٣ \times - \frac{١}{٤٤}$

$= - \frac{٩}{٢٢}$ وحدة / ث

تتحرك نقطة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يتساوى فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مع معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن

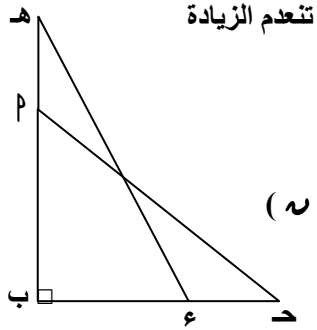
الحل

$٢ س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$ ، $\because \frac{ع س}{ع ن} = \frac{ع ص}{ع ن}$ $\therefore$ س = – ص

بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج : $ص^{٢} = ٤$ و منها : ص = ٢ $\therefore$ س = – ٢

أو : ص = – ٢ $\therefore$ س = ٢ $\therefore$ النقطة هى : (– ٢ ، ٢) أو (٢ ، – ٢)

إذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم و كان طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم / دقيقة و طول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم / دقيقة أوجد : معدل تزايد مساحة المثلث بعد ٣ دقائق ، الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة



الحل

من الشكل المقابل : بعد ن دقيقة

ب ء = ٨ − $\frac{١}{٢}$ ن ، ب هـ = ٦ + ن

مـ (△ ء ب هـ) " م " = $\frac{١}{٢}$ (٨ − $\frac{١}{٢}$ ن) (٦ + ن)

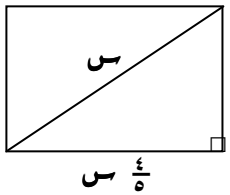
∴ م = $\frac{١}{٢}$ (٤٨ + ٥ ن − $\frac{١}{٢}$ ن^{٢})

، $\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{١}{٢}$ (٥ − ن)

بعد ٣ دقائق يكون : $\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{١}{٢}$ (٥ − ٣) = ١ سم / دقيقة

، $\frac{ءم}{ءن}$ = ٠ " تنعدم " عندما : ٥ − ن = ٠ ∴ ن = ٥ دقائق

صفيحة مستطيلة الشكل طولها يساوى $\frac{٤}{٥}$ طول قطرها تنكمش بإنتظام فينكمش طولها فى لحظة بمعدل ١٠ سم / ث و تنكمش مساحتها فى نفس اللحظة بمعدل ٣٠ سم^{٢} / ث أوجد مساحتها فى هذه اللحظة



الحل

نفرض أن الطول = س سم ، طول القطر = $\frac{٥}{٤}$ س سم

∴ العرض = $\frac{٣}{٤}$ س سم

، المساحة " م " = س × $\frac{٣}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = $\frac{٣}{٢}$ س $\frac{ءس}{ءن}$

∴ − ٣٠ = $\frac{٣}{٢}$ س × (− ١٠) و منها : س = ٢ سم

∴ الطول = ٢ سم ، العرض = $\frac{٣}{٢}$ سم

∴ مساحة الصفيحة = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣ سم^{٢}

حل آخر

نفرض أن : الطول = ٤ س سم ∴ القطر = ٥ س سم ∴ العرض = ٣ س سم

∴ $\frac{ء٤س}{ءن}$ = ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ = − ١٠ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = − $\frac{٥}{٢}$ ∴ م = ١٢ س^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٢٤ س $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ − ٣٠ = ٢٤ س × (− $\frac{٥}{٢}$) و منها : س = $\frac{١}{٢}$ سم

∴ الطول = ٢ سم ∴ العرض = $\frac{٣}{٢}$ سم ∴ مساحة الصفيحة = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣ سم^{٢}

مستطيل مساحته ثابتة و تساوى ٨ سم^{٢} يزداد طوله بمعدل ٠,٤ سم فى الثانية كم يكون عرض المستطيل عند اللحظة التى يكون معدل تناقص هذا العرض ٠,٠٥ سم فى الثانية

الحل

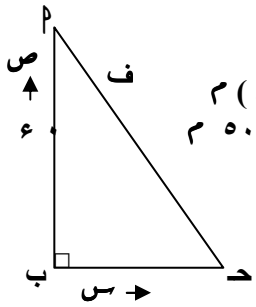
نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم

∴ س ص = ٨ ∴ ص = $\frac{٨}{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = − $\frac{٨}{س^{٢}}$ $\frac{ءس}{ءن}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = − $\frac{٨}{س^{٢}}$ × ٠,٤

و منها : س^{٢} = ٦٤ ∴ س = ٨ ∴ ص = ١ سم

يرتفع بالون رأسياً لأعلى بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م / ث و عندما كان البالون على إرتفاع ٩٠ م مرت تحته مباشرة سيارة و واصلت سيرها فى خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ٢٥ م / ث أوجد المعدل الذى تزداد به المسافة بين السيارة و البالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون



الحل

من الشكل المقابل : أ ب = (٩٠ + ص) م ، ب حـ = (س) م

، بعد ثانيتين : ص = ٢ × ١٥ = ٣٠ م ، س = ٢ × ٢٥ = ٥٠ م

∴ أ ب = ١٢٠ م ، ب حـ = ٥٠ م ∴ ف = ١٣٠ م

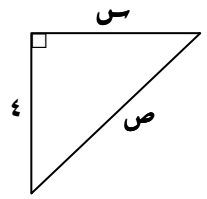
، ف^{٢} = س^{٢} + (٩٠ + ص)^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ (٩٠ + ص) × ١ × $\frac{ءص}{ءن}$

∴ ٢ × ١٣٠ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ٥٠ + ٢ × ١٢٠ × ١ × ١٥

و منها : $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢٣ $\frac{٦}{١٣}$ م / ث

تمر طائرة تطير موازية لسطح الأرض على إرتفاع ٤ كم فوق محطة رادار بعد وقت قصير ظهرت أجهزة الرادار أن المسافة بين الطائرة و المحطة تساوى ٥ كم و أن المسافة بين الطائرة و المحطة تزيد بمعدل ٣٠٠ كم / س أوجد السرعة الأفقية التى تتحرك بها الطائرة عند هذه اللحظة



الحل

من الشكل المقابل : $س^{٢} = ص^{٢} - ١٦$

عندما : ص = ٥ فإن : س = ٣

∵ $٢ س \frac{ع س}{ع ن} = ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن}$ ∴ $٣ \frac{ع س}{ع ن} = ٥ \times ٣٠٠$

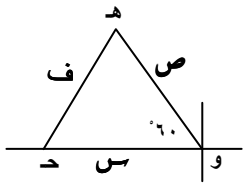
∴ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٥٠٠ كم / س " السرعة الأفقية للطائرة "

أبحرت سفينة من ميناء الساعة التاسعة صباحاً متجه نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم / س و بعد ساعة أبحرت سفينة أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠ كم / س فى إتجاه ٦٠° شمال الغرب أوجد معدل التباعد بين السفينتين الساعة ١١ صباحاً

الحل

من الشكل المقابل :

فى أى لحظة نفرض أن السفينة الأولى تكون على بعد س كم من الميناء (و) ، و السفينة الثانية عل بعد ص كم منه ، المسافة بينهما ف كم



∴ $ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص$ حتا ٦٠° = $س^{٢} + ص^{٢} - س ص$ (١)

، $٢ ف \frac{ع ف}{ع ن} = ٢ س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} - س \frac{ع س}{ع ن} - ص \frac{ع ص}{ع ن}$

∴ $٢ ف \frac{ع ف}{ع ن} = س \frac{ع س}{ع ن} + ص \frac{ع ص}{ع ن}$ (٢)

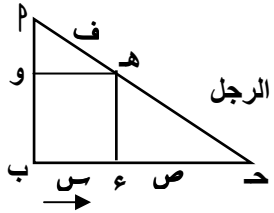
عند الساعة الحادية عشر : س = ٢٠ × ٢ = ٤٠ كم ، ص = ٤٠ × ١ = ٤٠ كم

، من (١) : $ف^{٢} = ١٦٠٠ + ١٦٠٠ - ١٦٠٠ = ١٦٠٠$ ∴ ف = ٤٠ كم

∴ من (٢) : $٨٠ \frac{ع ف}{ع ن} = ٤٠ \times ٢٠ + ٤٠ \times ٤٠$ و منها : $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٣٠ كم / س

رجل طوله ١٧٠ سم يسير بسرعة ٤ م / د فى خط مستقيم متجهاً نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٨٠ سم أوجد معدل تغير طول ظل الرجل ، معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٦٨٠ سم من قاعدة المصباح

الحل



فى الشكل المقابل : أ ب = إرتفاع المصباح ، ع هـ = طول الرجل ، س = ب ع = المسافة التى تحركها الرجل ، ص = ع حـ = طول ظل الرجل ، ف = أ ب = بعد رأس الرجل عن المصباح ، المثلثين أ ب حـ ، هـ ع حـ متشابهين

∴ $\frac{س + ص}{ص} = \frac{٦٨٠}{١٧٠} = \frac{٤}{١}$ ∴ س + ص = ٤ ص

∴ س = ٣ ص ∴ $\frac{ع س}{ع ن} = ٣ \frac{ع ص}{ع ن}$ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = -\frac{٤}{٣}$ م / د

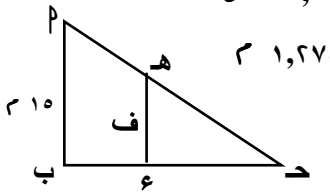
، من المثلث أ و هـ : $ف^{٢} = س^{٢} + (٥١٠)^{٢}$ " لأن : أ و = ٦٨٠ - ١٧٠ = ٥١٠ "

، عندما : س = ٦٨٠ فإن : ف = ٨٥٠ ، $٢ ف \frac{ع ف}{ع ن} = ٢ س \frac{ع س}{ع ن}$

∴ $٨٥٠ \frac{ع ف}{ع ن} = ٦٨٠ \times (-٤)$ و منها : $\frac{ع ف}{ع ن}$ = - ٣٢٠ م / د

عمود إنارة طوله ١٥ مترا أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلي أعلي بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة ١٢ مترا من قاعدة العامود أوجد معدل ابتعاد الكرة علي الأرض من قاعدة العامود عند منتصف الثانية الأولى

الحل



∵ $ف = ع_{ن} - \frac{١}{٢} ع ن^{٢}$ ∴ $ف = ٥ ن - \frac{١}{٢} \times ٩,٨ \times ن^{٢}$

∴ $\frac{ع ف}{ع ن} = ٥ - ٩,٨ ن$ ∴ عند : $ن = \frac{١}{٢}$ فإن : ف = ١,٢٧٥ م

∴ $\frac{ع ف}{ع ن} = ٥ - ٩,٨ \times \frac{١}{٢} = ٠,١$ م / د

من الشكل : المثلثين أ ب حـ ، هـ ع حـ متشابهين

∴ $\frac{ف}{١٥} = \frac{ص - ١٢}{ص}$

حيث : ص = ب حـ = بعد الكرة عن قاعدة العمود ، ف = ع هـ = المسافة التى تحركتها الكرة

∴ ١٥ ص - ١٨٠ = ف ص أى أن : $ص = \frac{١٨٠}{١٥ - ف}$

∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = \frac{١٨٠ \frac{ع ف}{ع ن}}{(١٥ - ف)^{٢}}$ = ٠,٠٩ تقريباً

تتمدد قطعة من المعدن علي هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم و ارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^{٣} / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن

الحل

نفرض أن : عرض القاعدة = س سم

∴ طول القاعدة = س + ٢ سم ، الإرتفاع = ٣ س سم

∴ ح = س × (س + ٢) × ٣ س = ٣ س^{٣} + ٦ س^{٢}

∴ $\frac{ع ح}{ع ن}$ = ٩ س^{٢} × $\frac{ع س}{ع ن}$ + ١٢ س × $\frac{ع س}{ع ن}$

∴ ٠,٦ = (٩ س^{٢} + ١٢ س) × ٠,٠١ ∴ ٦٠ = ٩ س^{٢} + ١٢ س

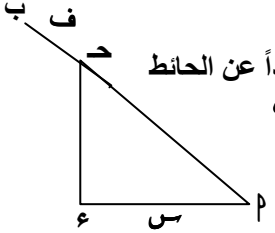
∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س − ٢٠ = ٠ ∴ (س − ٢) (٣ س + ١٠) = ٠

∴ س = ٢ ، س = − $\frac{١٠}{٣}$ مرفوض

∴ الأبعاد هى : ٢ ، ٤ ، ٦ سم

يستند قضيب أ ب طوله ١٠ م بطرفه أ على أرض أفقية و بإحدى نقطه حـ على حائط رأسى إرتفاعه ٦ م ، إذا أنزلق الطرف أ مبتعداً عن الحائط بمعدل ١,٥ م/ د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل إلى حافة الحائط

الحل



فى الشكل المقابل : س = أ ء = المسافة التى تحركها الطرف أ مبتعداً عن الحائط

، ف = ب حـ = المسافة التى تحركها الطرف ب ، أ حـ = ١٠ − ف

من المثلث أ ء حـ : (١٠ − ف)^{٢} = س^{٢} + ٣٦

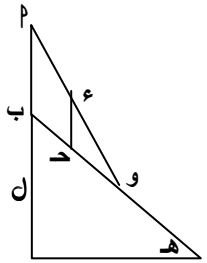
عندما يصل القضيب إلى حافة الحائط فإن : ف = ٠ ∴ س = ٨

، ٢ (١٠ − ف) $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$

∴ ٢ × ١٠ × − $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ × ٨ × ١,٥ و منها : $\frac{ع ف}{ع ن}$ = − ١,٢ م/ د

يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦ م/ د أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ و طوله ٢٥ م و هناك مصباح مثبت على إرتفاع $\frac{١}{٤}$ ١١ م فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسياً فوق أعلى نقطة للمنحدر أوجد معدل إنكماش طول ظل الرجل ، معدل إقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر

الحل



فى الشكل المقابل : ل = إرتفاع المنحدر ، أ ب = إرتفاع المصباح

، س = ب حـ = بعد الرجل عن قمة المنحدر ، ص = حـ و = طول ظل الرجل

، (و) نهاية ظل الرجل : ف = ب و ، هـ زاوي ميل المنحدر على الأفقى

∵ ظا هـ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، طول المنحدر = ٢٥ م ∴ ل = ٧ م

∴ أ ب = $\frac{١}{٤}$ ١١ − ٧ = $\frac{١}{٤}$ ٤ م = ٤,٢٥ م

∵ المثلثين أ ب و ، ء حـ و متشابهين ∴ $\frac{س + ص}{ص}$ = $\frac{٤٢٥}{١٧٠}$ = $\frac{٥}{٢}$

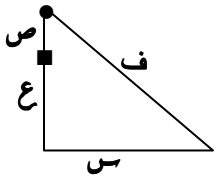
∴ ٢ س + ٢ ص = ٥ ص ∴ ٢ س = ٣ ص

∴ ٢ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٣ $\frac{ع ص}{ع ن}$ ، ∵ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٦ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٤ م/ د

، ∵ ف = س + ص ∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = $\frac{ع س}{ع ن}$ + $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٦ + ٤ = ١٠ م/ د

يرفع رجل دلواً مملوءاً بالأسمنت إلى سقالة على إرتفاع ٨ م فوق رأسه بواسطة حبل طوله ١٧ م يمر على بكرة ملساء مثبتة فى السقالة و كان الرجل يحفظ الطرف الخالص للحبل أفقياً فى مستوى رأسه و يمشى أفقياً بسرعة ٤ م/ د أوجد السرعة التى يرتفع بها الدلو عندما يمشى الرجل ٦ م

الحل



فى الشكل المقابل : ع + ص = ٨ ∴ ص = ٨ − ع

، ف + ص = ١٧ ∴ ٨ − ع + ف = ١٧

∴ ف = ع + ٩ ، ∵ (ع + ٩)^{٢} = س^{٢} + ٦٤ (١)

∴ ٢ (ع + ٩) $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ (٢)

عند : س = ٦ ∴ من (١) : ع = ١ ، ∵ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٤

∴ من (٢) : $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢,٤ م/ د

برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطره ١٠ م و إرتفاعه ١٨ م فإذا كان معدل دخول البترول فى البرميل $\frac{١٠٠٠}{١ + ل}$ م^{٣} / د حيث ل إرتفاع البترول عند أى لحظة أوجد معدل إرتفاع البترول عندما يمتلئ نصف البرميل

الحل

∵ ح = π نق^{٢} ل = ١٠٠ π ل ∴ $\frac{ع ح}{ع ن}$ = ١٠٠ π $\frac{ع ل}{ع ن}$

∴ $\frac{١٠٠٠}{١ + ل}$ = ١٠٠ π $\frac{ع ل}{ع ن}$ ∴ $\frac{ع ل}{ع ن}$ = $\frac{١٠}{(١ + ل) π}$

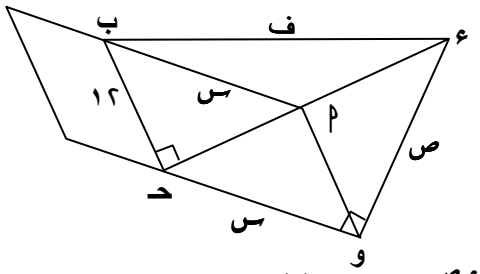
، عندما يمتلئ نصف البرميل يكون : ل = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

∴ $\frac{ع ل}{ع ن}$ = $\frac{١٠}{π ١٠}$ = $\frac{١}{π}$

يعبر رجل كوبرى يعلو سطح الماء بمقدار ١٢ م بسرعة منتظمة ٣ م / د ، شاهد قارب يسير فى إتجاه عمودى على الكوبرى بسرعة منتظمة ٦ م / د فى اللحظة التى كان فيها تحته تماماً أوجد المعدل الذى يبتعد به كل منهما عن الآخر بعد ٦ دقائق من اللحظة التى كانا فيها على خط رأسى واحد

الحل

من الشكل المقابل :



ف البعد بين الرجل و القارب

، س المسافة التى تحركها الرجل

، ص المسافة التى تحركها القرب

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ١٤٤ (١)

∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ (٢)

، ∵ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٣ ، ص = ٦ و بعد ٦ دقائق :

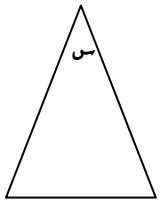
س = ١٨ م ، ص = ٣٦ م ∴ من (١) : ف = ٤٢ م

، من (٢) : ٢ × ٤٢ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ × ١٨ × ٣ + ٢ × ٣٦ × ٦

∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = $\frac{٤٥}{٧}$ م / د

مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٠ سم و قياس الزاوية بينهما يساوى (س) فإذا تغير (س) بمعدل ٣° فى الدقيقة أوجد معدل تغير مساحة المثلث (س) = ٦٠°

الحل



مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × حا س

∴ م = ١٨ حا س ، $\frac{ع م}{ع ن}$ = ١٨ حتا س × $\frac{ع س}{ع ن}$

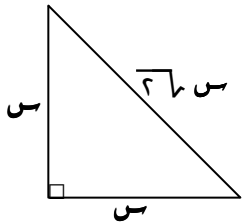
، ∵ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٣° ، عندما س = ٦٠°

∴ $\frac{ع م}{ع ن}$ = ١٨ حتا ٦٠° × ٣ = ٥٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣ = ٨١

إذا كانت ص سم^{٢} هى مساحة سطح مثلث متساوى الساقين و قائم الزاوية و علم أن $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٣٢ سم^{٢} / ث عند اللحظة التى كان عندها طول كل من ساقى المثلث = ٨ سم

أوجد معدل تغير محيط هذا المثلث

الحل



نفرض أن طول كل من ساقى المثلث = س سم

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = س $\frac{ع س}{ع ن}$ ∴ $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{١}{س}$ $\frac{ع ص}{ع ن}$ (١)

، ∵ طول وتر المثلث = س √٢

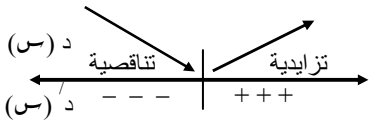
∴ محيطه (ح) = (٢ + √٢) س ، $\frac{ع ح}{ع ن}$ = (٢ + √٢) $\frac{ع س}{ع ن}$

بالتعويض من (١) و عندما س = ٨ سم فإن :

$\frac{ع ح}{ع ن}$ = (٢ + √٢) × $\frac{١}{٨}$ × ٣٢ = ٤ (٢ + √٢) سم / ث

سلوك الدالة و رسم منحناها

* تزايد و تناقص الدوال :
* الدالة المتزايدة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س$_1$) < د (س$_2$)
لكل س$_1$ < س$_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المتناقصة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س$_1$) > د (س$_2$)
لكل س$_1$ < س$_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المطردة التزايد :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س$_1$) ≤ د (س$_2$)
لكل س$_1$ < س$_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المطردة التناقص :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س$_1$) ≤ د (س$_2$)
لكل س$_1$ < س$_2$ فى هذه الفترة
* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد الدالة :
١ – إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى] أ ، ب [و كانت متزايدة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≤ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ – إذا كانت د$'$ (س) > ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة
٣ – إذا كانت د$'$ (س) ≤ ٠ فى] أ ، ب [
فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة



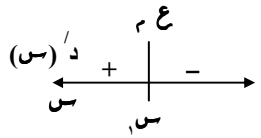
* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تناقص الدالة :
١ – إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق
فى] أ ، ب [و كانت متناقصة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≥ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ – إذا كانت د$'$ (س) > ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة
٣ – إذا كانت د$'$ (س) ≥ ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة

* ملاحظات :
* تبقى تعريفات التزايد و التناقص كما هى إذا أستبدلت] أ ، ب [بأى من : [أ ، ب]
أو] أ ، ب] أو [أ ، ب [
* لإيجاد فترات التزايد نحل المتباينة : د$'$ (س) > ٠
، لإيجاد فترات التناقص نحل المتباينة : د$'$ (س) < ٠

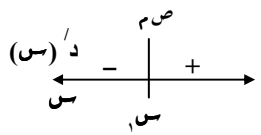
* النقط الحرجة للدالة :
يقال أن س$_1$ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين :
(١) د$'$ (س$_1$) لها وجود و تساوى الصفر (٢) د$'$ (س$_1$) غير موجودة

* القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة :
* نظرية (١) :
إذا كانت : الدالة د (س) معرفة على] أ ، ب [و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى
محلية عند س$_1$ ∈] أ ، ب [فإن د$'$ (س$_1$) = ٠

* نظرية (٢) :
إذا كانت : الدالة د (س) متصلة و كان :



[١] د$'$ (س) ⩽ ٠ لقيم س على يسار س$_1$ مباشر
، د$'$ (س) ⩾ ٠ لقيم س على يمين س$_1$ مباشرة
فإن : س$_1$ نقطة عندها قيمة عظمى محلية



[٢] د$'$ (س) ⩾ ٠ لقيم س على يسار س$_1$ مباشرة
، د$'$ (س) ⩽ ٠ لقيم س على يمين س$_1$ مباشرة
فإن : س$_1$ نقطة عندها قيمة صغرى محلية

* نظرية (٣) :
إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق و كان :
[١] د$'$ (س) = ٠ ، د$''$ (س$_1$) > ٠ فإن : (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة صغرى محلية
[٢] د$'$ (س) = ٠ ، د$''$ (س$_1$) < ٠ فإن : (س$_1$ ، د (س$_1$)) نقطة عظمى محلية

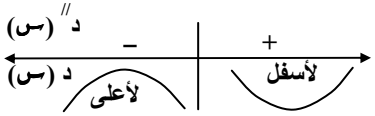
* ملاحظات :
* إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س١ و كانت : د/ (س١) = ٠
فليس من الضرورى أن تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية
* قد تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية و مع ذلك
د/ (س١) غير موجودة
* إذا كانت : د// (س١) = ٠ نستخدم المشتقة الأولى للتحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى

* القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة :
إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فإن :
* القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* خطوات التعيين :
* نوجد المشتقة الأولى
* نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
* نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
* نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً من الخطوتين السابقتين
و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
* نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه
* ملاحظات :
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جزء صغير من فترة تعريف الدالة
بينما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) لها فى جزء كل فترة تعريف الدالة
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية و لكنها أكبر (أو أصغر) هذه القيم جميعاً
* كل قيمة عظمى أو صغرى مطلقة تكون قيمة عظمى أو صغرى محلية ولكن العكس غير صحيح
* القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة ، لكن يمكن أن يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى أو صغرى محلية

* دائماً القيمة العظمى المطلقة ≥ القيمة الصغرى المطلقة
لكن ليس من الضروري أن تكون : القيمة العظمة المحلية > القيمة الصغرى المحلية

* تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة
هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما
* خطوات الحل :
(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " و ذلك بالإستعانة بمعطيات المسألة
(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة فيها
(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة
(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة وعند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

* التحدب :
* التحدب إلى أعلى :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* التحدب إلى أسفل :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* نظرية :
١ـ إذا كانت د// (س) < ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى في هذه الفترة
٢ـ إذا كانت د// (س) > ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل في هذه الفترة



* خطوات بحث تحدب منحنى الدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :
(١) نوجد د// (س)
(٢) نوجد مجموعة حل د// (س) ≥ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أعلى
، نوجد مجموعة حل د// (س) ≤ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أسفل

* **نقط الإنقلاب :**

هي النقط التي تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب لأعلى من منحنى

* **خطوات تعيين نقط الإنقلاب للدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :**

- نوجد $د'(س)$ ، $د''(س)$ ثم نحل المعادلة $د''(س) = ٠$
- نبحث إشارة $د''(س)$ قبل و بعد " مباشرة " كل نقطة من النقط السابقة بحيث تنتمى هذه النقط لمجال الدالة فيكون :

(١) $د''(س)$ تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فتكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

(٢) $د''(س)$ لا تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فلا تكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

* **رسم المنحنيات :**

لرسم منحنى الدالة د (س) " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :

١ ـ نوجد $د'(س)$ ، $د''(س)$

٢ ـ نستخدم $د'(س)$ فى تعيين :

أ ـ مناطق التزايد حيث $د'(س) > ٠$ ، مناطق التناقص حيث $د'(س) < ٠$

ب ـ نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث $د'(س) = ٠$

٣ ـ نستخدم $د''(س)$ فى تعيين :

أ ـ مناطق التحدب إلى أعلى حيث $د''(س) > ٠$

، مناطق التحدب إلى أسفل حيث $د''(س) < ٠$

ب ـ نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث $د''(س) = ٠$

٤ ـ نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :

أ ـ نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة (س) = ٠ " إن أمكن "
و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠ أى (٠ ، د (٠))

ب ـ بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة و إيجاد (س)

٥ ـ ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

تمارين محلولة

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = $س^{٢}$ ـ ٤ س + ٥

الحل

∵ د (س) = $س^{٢}$ ـ ٤ س + ٥ ∴ $د'(س)$ = ٢ س ـ ٤ = ٢ (س ـ ٢)

∴ $د'(س)$ = ٠ عندما : س = ٢

∵ $د'(س) > ٠$ فى] ٢ ، ∞ [

∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [

، ∵ $د'(س) < ٠$ فى] ـ ∞ ، ٢ [∴ د (س) تناقصية فى] ـ ∞ ، ٢ [

س	٢
د (س)	↘ ↗
$د'(س)$	ـ ٠ +

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = (س ـ ٢) (س + ١)^{٢}

الحل

∵ د (س) = (س ـ ٢) (س + ١)^{٢}

∴ $د'(س)$ = (س + ١)^{٢} + ٢ (س + ١) (س ـ ٢)

= ٣ (س + ١) (س ـ ١)

∴ $د'(س)$ = ٠ عندما : س = ١ ، س = ـ ١

∵ $د'(س) > ٠$ فى] ١ ، ∞ [،] ـ ∞ ، ـ ١ [

∴ د (س) تزايدية فى] ١ ، ∞ [،] ـ ∞ ، ـ ١ [

، ∵ $د'(س) < ٠$ فى] ـ ١ ، ١ [∴ د (س) د تناقصية فى] ـ ١ ، ١ [

س	ـ ١		١	
د (س)		↘		↗
$د'(س)$	+ ٠	ـ	٠	+

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$

الحل

∵ د (س) = (س ـ ١)$^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}$ (س ـ ١)$^{-\frac{١}{٣}}$ $= \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}}$ (غير معرف عند س = ١)

س		١	
د (س)	↘	غير معرف	↗
$د'(س)$	ـ		+

∵ عندما : س < ١ يكون : د/ (س) < ٠ ∴ د تزايدية فى] ١ ، ∞ [
، ∵ عندما : س > ١ يكون : د/ (س) > ٠ ∴ د تناقصية فى] – ∞ ، ١ [

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

الحل

∵ ٩ – س^{٢} = ٠ عندما : (٣ – س) (٣ + س) = ٠
أى عندما : س = ٣ ، س = – ٣ ∴ مجال د (س) = [– ٣ ، ٣]

، ∵ د (س) = (٩ – س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

∴ د/ (س) = $\frac{١}{٢}$ (٩ – س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ × (– ٢ س)

س		– ٣		٠		٣
د/ (س)	+	٠	+	٠	–	
د (س)	↗		↗		↘	

و منها : د/ (س) = ٠ عندما : س = ٠
∵ د/ (س) > ٠ فى] – ٣ ، ٠ [∴ د (س) تزايدية فى] – ٣ ، ٠ [
، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٠ ، ٣ [∴ د (س) تناقصية فى] ٠ ، ٣ [

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = س + $\frac{١}{س}$

الحل

∵ د (س) = س + س$^{-١}$ ∴ مجال د (س) = ح – { ٠ }
، د/ (س) = ١ – س$^{-٢}$ = ١ – $\frac{١}{س^{٢}}$ حيث : س ≠ ٠

و منها : س^{٢} = ١ أى : س = ١ أ، س = – ١
أى أن : د/ (س) = ٠
عندما : س = ١ أ، س = – ١
و غير معرف عندما : س = ٠

س		– ١		٠		١	
د/ (س)	+	٠	–	غ.م	–	٠	+
د (س)	↗		↘		↘		↗

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] – ∞ ، – ١ [،] ٠ ، ١ [
∴ د (س) تزايدية فى] – ∞ ، – ١ [،] ٠ ، ١ [
، ∵ د/ (س) > ٠ فى] – ١ ، ٠ [،] ١ ، ∞ [
∴ د (س) تناقصية فى] – ١ ، ٠ [،] ١ ، ∞ [

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ س & ، س \geq ٢ \\ ٢ س - ٨ & ، س < ٢ \end{cases}$

الحل

∵ د/ (س) = $\begin{cases} ٢ س - ٤ & ، س > ٢ \\ ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

س		٢	
د/ (س)	–	٠	+
د (س)	↘		↗

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [
، د/ (س) > ٠ فى] – ∞ ، ٢ [∴ د (س) تناقصية فى] – ∞ ، ٢ [

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة : د (س) = | س – ٣ |

الحل

∵ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ س & ، س \leq ٣ \\ ٣ س - س^{٢} & ، س > ٣ \end{cases}$ ∵ د/ (س) = $\begin{cases} ٢ س - ٣ & ، س < ٣ \\ ٣ - ٢ س & ، س > ٣ \end{cases}$

، ∵ د (س) غير قابلة للإشتقاق عندما : س = ٣
، د/ (س) = ٠ عندما : س = $\frac{٣}{٢}$
، د/ (س) > ٠ فى] – ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [،] ٣ ، ∞ [
∴ د (س) تزايدية فى] – ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [،] ٣ ، ∞ [
، د/ (س) > ٠ فى] $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [∴ د (س) تناقصية فى] $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [

س		$\frac{٣}{٢}$		٣	
د/ (س)	+	٠	–	٠	+
د (س)	↗		↘		↗

عين فترات التزايد و التزايد المطرد و فترات التناقص و التناقص المطرد للدالة :

د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < ٠ \\ ٣ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ س - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$

الحل

∵ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < ٠ \\ ٣ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ س - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$ ∵ د/ (س) = $\begin{cases} ٢ س & ، س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

∵ د/ (س) > ٠ فى] – ∞ ، ٠ [
∴ د (س) تناقصية فى] – ∞ ، ٠ [
∵ د/ (س) > ٠ فى] ٣ ، ∞ [
∴ د (س) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [
∵ د (س) ثابتة فى] ٠ ، ٣ [أى أن : د/ (س) = ٠ فى] ٠ ، ٣ [
∴ د (س) مطردة التناقص فى] – ∞ ، ٠ [، و مطردة التزايد فى] ٣ ، ∞ [

س		٠		٣	
د/ (س)	–	٠	٠	٠	+
د (س)		↓		↑	

عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - ٤س - س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ٢س - ٤ & ، س < ١ \end{cases}$$

الحل

$$∵ د(س) = \begin{cases} ٣ - ٤س - س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ٢س - ٤ & ، س < ١ \end{cases} \quad ∴ د/(س) = \begin{cases} -٤ - ٢س & ، س < ١ \\ \text{غير معرفة} & ، س = ١ \\ ٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

لأن : ∵ د/ (١⁻) = – ٦ ، د/ (١⁺) = ٢
∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ١ ∴ (١ ، – ٢) نقطة حرجة
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ١ ، د/ (س) > ٠ عندما : س > ١
∴ (١ ، – ٢) نقطة قيمة صغرى محلية
∵ د (س) = ٠ عندما : – ٤ – ٢ س = ٠ أى عندما : س = – ٢
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > – ٢ ، د/ (س) > ٠ عندما : – ٢ < س > ١
∴ (٢ ، – ٧) نقطة قيمة عظمى محلية

عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :

د (س) = | س | س – ٥ |

الحل

$$∵ د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٥س & ، س \leq ٥ \\ ٥س - س^{٢} & ، س > ٥ \end{cases} \quad ∴ د/(س) = \begin{cases} ٢س - ٥ & ، س > ٥ \\ \text{غير معرفة} & ، س = ٥ \\ ٥ - ٢س & ، س > ٥ \end{cases}$$

لأن : ∵ د/ (٥⁻) = – ٥ ، د/ (٥⁺) = ٥
∴ د (س) غير قابلة للإشتقاق عند س = ٥ ∴ (٥ ، ٠) نقطة حرجة
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ٥ ، د/ (س) > ٠ عندما : س > ٥
∴ (٥ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية
∵ د (س) = ٠ عندما : ٥ – ٢ س = ٠ أى عندما : س = $\frac{٥}{٢}$
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > $\frac{٥}{٢}$ ، د/ (س) > ٠ عندما : $\frac{٥}{٢}$ > س > ٥
∴ ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٤}$) نقطة قيمة عظمى محلية

عين النقط الحرجة ثم اختبر كل منها من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية للدالة :

$$د(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} - ٤س}$$

الحل

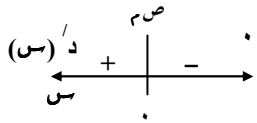
$$∵ د(س) = (س^{٢} - ٤س)^{\frac{١}{٣}} \quad ∴ د/(س) = \frac{١}{٣}(س^{٢} - ٤س)^{-\frac{٢}{٣}} \times (٢س - ٤) = \frac{٢(س - ٢)}{\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤س)^{٢}}}$$

حيث : غير معرف عند س = ٠ ، س = ٤
∵ د/ (س) > ٠ قبل و بعد : س = ٠ ، د/ (س) > ٠ قبل و بعد : س = ٤
∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية عند س = ٠ ، س = ٤
∵ د (س) = – $\sqrt[٣]{٤}$ عندما : س = ٢
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ٢ ، د/ (س) > ٠ عندما : س > ٢
∴ (٢ ، – $\sqrt[٣]{٤}$) نقطة قيمة صغرى محلية

أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة : د (س) = س⁴ – ٤

الحل

∵ د (س) = س⁴ – ٤ ∴ د/ (س) = ٤ س³ ، د// (س) = ١٢ س²
∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ∴ س = ٠ نقطة حرجة للدالة
∵ د// (س) = ٠ عندما : س = ٠
∴ د// (س) لا تصلح لإختبار وجود قيم عظمى أو صغرى عند س = ٠
لذا نستخدم د/ (س)
∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ٠



∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ٠
∴ (٠ ، ـ ٤) نقطة قيمة صغرى محلية

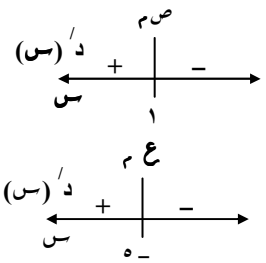
أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :
د (س) = س٤ ـ ٤ س٣ + ٤ س٢ ـ ١٥
الحل
د/ (س) = ٤ س٣ ـ ١٢ س٢ + ٨ س = ٤ س (س٢ ـ ٣ س + ٢)
= ٤ س (س ـ ١) (س ـ ٢)
∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ١ ، س = ٢
، د// (س) = ١٢ س٢ ـ ٢٤ س + ٨
∵ د// (٠) = ٨ > ٠ ∴ (٠ ، ـ ١٥) نقطة قيمة صغرى محلية
، د// (١) = ـ ٤ < ٠ ∴ (٠ ، ـ ١٤) نقطة قيمة عظمى محلية
، د// (٢) = ٨ > ٠ ∴ (٢ ، ـ ١٥) نقطة قيمة صغرى محلية

أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة :
د (س) = (س ـ ١) (س ـ ٢)٢
الحل
∵ د (س) = (س ـ ١) (س ـ ٢)٢ = س٣ ـ ٥ س٢ + ٨ س ـ ٤
∴ د/ (س) = ٣ س٢ ـ ١٠ س + ٨ = (٣ س ـ ٤) (س ـ ٢)
∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ٤/٣ ، س = ٢
، د// (س) = ٦ س ـ ١٠
∵ د// (٤/٣) = ـ ٢ < ٠ ∴ (٤/٣ ، ٤/٢٧) نقطة قيمة عظمى محلية
، د// (٢) = ٢ > ٠ ∴ (٢ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية

أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة : د (س) = $\frac{٣ س^{٢} + ٥ س + ٢٥}{س + ٢}$
الحل

∵ د/ (س) = $\frac{(س+٢)(٦س+٥) - (٣ س^{٢} + ٥ س + ٢٥)}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{٣ (س - ١)(س + ٥)}{(س + ٢)^{٢}}$

، ∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ـ ٥
، ∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ١
، د/ (س) < ٠ عندما : س < ١
∴ (١ ، ١١) نقطة صغرى محلية
، ∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ـ ٥
، د/ (س) < ٠ عندما : س < ـ ٥
∴ (ـ ٥ ، ـ ٢٥) نقطة قيمة عظمى محلية



أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة د (س) = س٢ + ٦ س في [ـ ٥ ، ـ ١]
الحل
د/ (س) = ٢ س + ٦ ، د/ (س) = ٠ عندما : س = ـ ٣
، ∵ د (ـ ٣) = ـ ٩ ، د (ـ ٥) = ـ ٥ ، د (ـ ١) = ـ ٥
∴ القيمة العظمى المطلقة = ـ ٥ عند س = ـ ٥ ، س = ـ ١
، القيمة الصغرى المطلقة = ـ ٩ عند س = ـ ٣

أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة د (س) = س٣ ـ ٣ س٢ ـ ٢٤ س + ٥٠
في [ـ ٣ ، ٥]
الحل
د/ (س) = ٣ س٢ ـ ٦ س + ٢٤ = ٣ (س ـ ٤) (س + ٢)
، د/ (س) = ٠ عندما : س = ٤ ، س = ـ ٢
، ∵ د (ـ ٣) = ٦٨ ، د (ـ ٢) = ٧٨ ، د (٤) = ـ ٣٠ ، د (٥) = ـ ٢٠
∴ القيمة العظمى المطلقة = ٧٨ عند س = ـ ٢
، القيمة الصغرى المطلقة = ـ ٣٠ عند س = ٤

أوجد القيمة العظمى و الصغرى المطلقة للدالة د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ س + ٣ ، س \geq ٤ \\ ١٥ - ٣ س ، س < ٤ \end{cases}$
في [٠ ، ٥]

الحل

د/ (س) = { ٢ س – ٤ ، س > ٤ ؛ غير معرفة ، س = ٤ ؛ – ٣ ، س < ٤ }

لأن : د/ (٤⁻) = – ٣ ، د/ (٥⁺) = ٤

∴ س = ٤ نقطة حرجة ، د/ (س) = ٠ عندما : س = ٢ ∴ س = ٢ نقطة حرجة

∵ د (٠) = ٣ ، د (٢) = – ١ ، د (٤) = ٣ ، د (٥) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٣ عند س = ٠ ، س = ٤

، القيمة الصغرى المطلقة = – ١ عند س = ٢

عين فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة

د (س) = س³ – ٩ س² + ٢٤ س – ٧

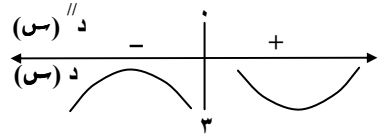
الحل

د/ (س) = ٣ س² – ١٨ س + ٢٤ ، د// (س) = ٦ س – ١٨ = ٦ (س – ٣)

، د// (س) = ٠ عندما : س = ٣

، د// (س) > ٠ عندما : س > ٣

، د// (س) < ٠ عندما : س < ٣



∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] – ∞ ، ٣ [، و محدب إلى أسفل فى] ٣ ، ∞ [

، (٣ ، ١١) نقطة إنقلاب

عين فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة

د (س) = س⁴ – ٣ س³ + ١٢ س² – ٨ س

الحل

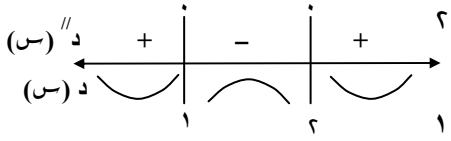
د/ (س) = ٤ س³ – ١٨ س² + ٢٤ س – ٨

، د// (س) = ١٢ س² – ٣٦ س + ٢٤ = ١٢ (س – ١) (س – ٢)

، د// (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٢

، د// (س) > ٠ عندما : ١ < س < ٢

، د// (س) < ٠ عندما : س < ١ ، س > ١



∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] ١ ، ٢ [

، و محدب إلى أسفل فى] – ∞ ، ١ [،] ٢ ، ∞ [

، (١ ، – ١) ، (٢ ، ٠) نقط إنقلاب

أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب لمنحنى الدالة :

د (س) = ٢ س³ – ٩ س² + ١٢ س – ١٠

الحل

د/ (س) = ٦ س² – ١٨ س + ١٢ = ٦ (س – ١) (س – ٢)

، د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٢

، د// (س) = ١٢ س – ١٨ ، د// (س) = ٠ عندما : س = ٣/٢

∵ د// (١) > ٠ ∴ (١ ، – ٥) نقطة قيمة عظمى محلية

∵ د// (٢) > ٠ ∴ (٢ ، – ٦) نقطة قيمة صغرى محلية

∵ د// (س) > ٠ عندما : س > ٣/٢ ، د// (س) > ٠ عندما : س < ٣/٢

∴ (٣/٢ ، – ١١/٢) نقطة إنقلاب

أوجد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب لمنحنى الدالة :

د (س) = س (س – ٣)³

الحل

د/ (س) = (س – ٣)³ + ٣ س (س – ٣)² = (س – ٣)² (٤ س – ٣)

، د/ (س) = ٠ عندما : س = ٣ ، س = ٣/٤

، د// (س) = ٢ (س – ٣) (٤ س – ٣) + ٤ (س – ٣)²

= ٦ (س – ٣) (٢ س – ٣)

، د// (س) = ٠ عندما : س = ٣ ، س = ٣/٤

∵ د/ (س) > ٠ عندما : س > ٣ ، د/ (س) < ٠ عندما : س < ٣

∴ (٣ ، ٠) ليست نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية

∵ د// (٣/٤) > ٠ ∴ (٣/٤ ، ٢١٨٧/٢٥٦) نقطة قيمة صغرى محلية

∵ د// (س) > ٠ عندما : س > ٣/٤ ، د// (س) < ٠ عندما : س < ٣/٤

∴ (٣/٤ ، − ٨١/٦) نقطة إنقلاب

∵ د// (س) > ٠ عندما : س < ٣ ، د// (س) < ٠ عندما : س > ٣

∴ (٣ ، ٠) نقطة إنقلاب

أوجد معادلة المماس الإنقلابى للمنحنى : ص = س³ − ٦ س² + س − ٢

الحل

د/ (س) = ٣ س² − ١٢ س + ١ (١)

، د// (س) = ٦ س − ١٢ = ٦ (س − ٢) ، ∵ د// (س) = ٠ عندما : س = ٢

∴ (٢ ، − ١٦) نقطة إنقلاب ، و من (١) ميل المماس عندها = − ١١

∴ معادلة المماس الإنقلابى هى : ص + ١٦ = − ١١ (س − ٢)

أى : ١١ س + ص − ٦ = ٠

أوجد قيم ل ، ل إذا علم أن منحنى الدالة : د (س) = س² + ل س + ل له نقطة حرجة عند س = ٢ ، د (٢) = ١ ثم عين نوع هذه النقطة من حيث كونها عظمى أم صغرى محلية

الحل

∵ د (س) = س² + ل س + ل ، د (٢) = ١ ∴ ١ = ٤ + ٢ ل + ل (١)

، د/ (س) = ٢ س + ل ، س = ٢ نقطة حرجة

∴ د/ (٢) = ٠ ∴ ٤ + ل = ٠ و منها : ل = − ٤

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥

، ∵ د// (س) = ٢ ، بالتالى : د// (٢) > ٠ ∴ (٢ ، ١) نقطة قيمة صغرى محلية

أوجد قيم ل ، ل إذا علم أن (١ ، − ٣) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة :

د (س) = س³ + ل س² + ل س يكون له

الحل

∵ د (س) = س³ + ل س² + ل س + ل ، (١ ، − ٣) تحقق معادلة المنحنى

∴ − ٣ = ١ + ل + ل (١)

، د/ (س) = ٣ س² + ٢ ل س + ل ، د// (س) = ٦ س + ٢ ل

∴ د// (س) = ٠ عندما : س = ١ ∴ ٦ + ٢ ل = ٠ و منها : ل = − ٣

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = − ١

أوجد قيم ل ، ل ، م ، ر إذا علم أن منحنى الدالة :

د (س) = ل س³ + ل س² + م س + ر يمر بالنقطة (١ ، ٥) ، النقطة (٢ ، ١) نقطة إنقلاب له ، المماس عندها معادلته هى : ٣ س + ص − ٧ = ٠

الحل

∵ د (س) = ل س³ + ل س² + م س + ر ، (١ ، ٥) تحقق معادلة المنحنى

∴ ٥ = ل + ل + م + ر (١)

، (٢ ، ١) تحقق معادلة المنحنى ∴ ١ = ٨ ل + ٤ ل + ٢ م + ر (٢)

، د/ (س) = ٣ ل س² + ٢ ل س + م ، ∵ المماس عند (٢ ، ١) ميله = − ٣

∴ − ٣ = ١٢ ل + ٤ ل + م (٣)

، د// (س) = ٦ ل س + ٢ ل ، (٢ ، ١) نقطة إنقلاب له

∴ د// (٢) = ٠ ∴ ١٢ ل + ٢ ل = ٠ ∴ ٦ ل + ل = ٠ (٤)

بطرح (٢) من (١) ينتج : − ٤ = ٧ ل + ٣ ل + م (٥)

بطرح (٣) من (٥) ينتج : ١ = ٥ ل + ل (٦)

بطرح (٦) من (٤) ينتج : ل = − ١ بالتعويض فى (٤) ينتج : ل = ٦

، بالتعويض فى (٣) ينتج : م = − ١٥ بالتعويض فى (١) ينتج : ر = ١٥

أوجد قيم ل ، ل ، م ، ر إذا علم أن منحنى الدالة :

د (س) = ل س³ + ل س² + م س + ر يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ، النقطة (− ١ ، ٢) نقطة إنقلاب له ، المماس عندها أفقى

الحل

∵ د (س) = ل س³ + ل س² + م س + ر ، (٠ ، ٤) تحقق معادلة المنحنى

∴ ٤ = ﻫ (١)

، (– ١ ، ٢) تحقق معادلة المنحنى ∴ ٢ = – ل + ل – م + ﻫ

و بالتعويض من (١) ينتج : ٢ = ل – م (٢)

، د/ (س) = ٣ ل س٢ + ٢ ل س + م ، ∵ المماس عند (– ١ ، ٢) ميله = ٠

∴ ٠ = ٣ ل – ٢ ل + م (٣)

، د// (س) = ٦ ل س + ٢ ل ، (– ١ ، ٢) نقطة إنقلاب له

∴ د// (– ١) = ٠ ∴ – ٦ ل + ٢ ل = ٠ ∴ – ٣ ل + ل = ٠ (٤)

بطرح (٣) من (٢) ينتج : – ٢ = ٢ ل – ل (٥)

بجمع (٤) ، (٥) ينتج : ل = ٢ بالتعويض فى (٤) ينتج : ل = ٦

، بالتعويض فى (٣) ينتج : م = ٦

إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة : د (س) = س٣ – ٣ س٢ + ٤

الحل

د/ (س) = ٣ س٢ – ٦ س = ٣ س (س – ٢)

، د// (س) = ٦ س – ٦ = ٦ (س – ١)

فترات التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢

س		٠		٢	
د/ (س)	+	٠	–	٠	+
د (س)	↗		↘		↗

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٠ ، ٢ [

∴ د (س) تناقصية فى] ٠ ، ٢ [

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [،] – ∞ ، ٠ [

∴ د (س) تزايدية فى] ٢ ، ∞ [،] – ∞ ، ٠ [

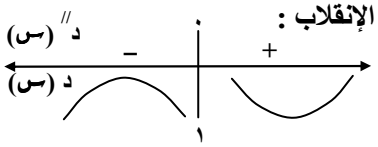
، ∵ د// (٠) = – ٦ < ٠ ∴ (٠ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية

، د// (٢) = ٦ > ٠ ∴ (٢ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية

فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب على أسفل و نقط الإنقلاب :

، د// (س) = ٠ عندما : س = ١

، د// (س) > ٠ عندما : س > ١



، د// (س) > ٠ عندما : س < ١

∴ منحنى د (س) محدب إلى أعلى فى] – ∞ ، ١ [

، و محدب إلى أسفل فى] ١ ، ∞ [

، (١ ، ٢) نقطة إنقلاب

نقط التقاطع مع المحورين :

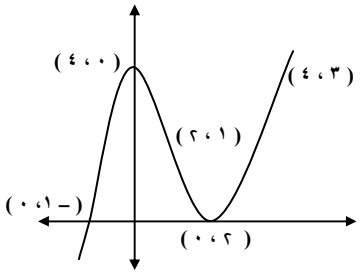
∵ د (س) = (س٣ + ١) – ٣ (س٢ – ١)

= (س + ١) (س – ٢)٢

∴ د (س) = ٠ عندما : س = – ١ ، س = ٢

، عندما : س = ٠ فإن : د (س) = – ١

نقط أخرى : (٣ ، ٤) ، (– ١ ، ٠)



إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة : د (س) = ٢ – س (س – ٣)٢

الحل

د (س) = ٢ – س٣ + ٦ س٢ – ٩ س

د/ (س) = – ٣ س٢ + ١٢ س – ٩ = – ٣ (س – ١) (س – ٣)

، د// (س) = – ٦ س + ١٢ = – ٦ (س – ٢)

فترات التزايد و التناقص و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

∵ د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٣

س		١		٣	
د/ (س)	–	٠	+	٠	–
د (س)	↘		↗		↘

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ١ ، ٣ [

∴ د (س) تزايدية فى] ١ ، ٣ [

، ∵ د/ (س) > ٠ فى] ٣ ، ∞ [،] – ∞ ، ١ [

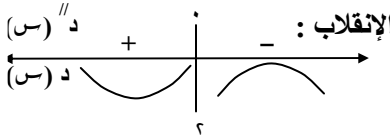
∴ د (س) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [،] – ∞ ، ١ [

، ∵ د// (١) = ٦ > ٠ ∴ (١ ، – ٢) نقطة قيمة صغرى محلية

، د// (٣) = – ٦ < ٠ ∴ (٣ ، ٢) نقطة قيمة عظمى محلية

فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب على أسفل و نقط الإنقلاب :

، د// (س) = ٠ عندما : س = ٢



، د″ (س) > ٠ عندما : س < ٢ ، د″ (س) < ٠ عندما : س > ٢

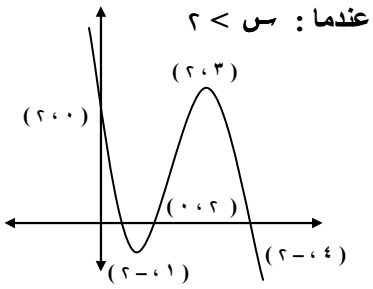
∴ منحنى د (س) محدب إلى أسفل فى] – ∞ ، ٢ [

، و محدب إلى أعلى فى] ٢ ، ∞ [

، (٢ ، ٠) نقطة إنقلاب

نقط التقاطع مع المحورين : ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

نقط أخرى : (٤ ، – ٢)



وجد احد مصانع الأجهزة الكهربية انه يكسب ٣٠ جنيه في كل جهاز إذا كان إنتاجه فى الشهر ٥٠جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فان الربح فى الجهاز يقل ٥٠ قرشا عن كل جهاز زيادة . أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق اكبر ربح ممكن

الحل

نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة = س جهاز ، الربح = ص جنيه

∵ الربح = عدد الأجهزة × ربح الجهاز الواحد

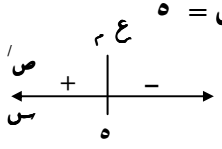
∴ ص = (٥٠ + س) (٣٠ – $\frac{١}{٢}$ س) = ١٥٠٠ + ٥ س – $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ ص$^{/}$ = ٥ – س ، ص$^{//}$ = – ١ ، ∵ ص$^{/}$ = ٠ عندما س = ٥

، ص$^{//}$ (٥) = – ١ < ٠

∴ ص$^{//}$ تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٥

∴ عدد الأجهزة التى تحقق أكبر ربح = ٥٠ + ٥ = ٥٥ جهاز



إذا كانت تكاليف استهلاك الوقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥ جنيهاً فى الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ كم / س كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه فى الساعة بصرف النظر عن سرعتها . أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكيلو متر الواحد اقل ما يمكن

الحل

∵ التكاليف ∝ مربع السرعة " ع^{٢} " ∴ التكاليف = ك ع^{٢} حيث : ك ثابت

∴ ٢٥ = ك (٢٥)^{٢} ∴ ك = $\frac{١}{٢٥}$ ∴ التكاليف = $\frac{١}{٢٥}$ ع^{٢}

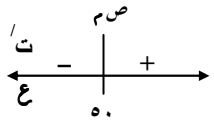
∴ تكاليف الساعة الواحدة = $\frac{١}{٢٥}$ ع^{٢} + ١٠٠

∴ تكاليف الكيلو متر الواحد " ت " = $\frac{\frac{١}{٢٥} ع^{٢} + ١٠٠}{ع}$ = $\frac{١}{٢٥}$ ع^{٢} + $\frac{١٠٠}{ع}$

∴ ت$^{/}$ = $\frac{١}{٢٥}$ – $\frac{١٠٠}{ع^{٢}}$ ، ت$^{//}$ = $\frac{٢٠٠}{ع^{٣}}$

، ∵ ت$^{/}$ = ٠ عندما ع = ٥٠ ، ت$^{//}$ (٥٠) > ٠

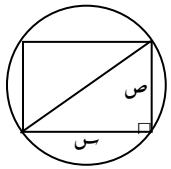
∴ تكلفة الكيلو متر الواحد تكون أقل ما يمكن عندما تكون سرعة القاطرة ٥٠ كم / س



إذا علم أن قوة إحتمال قطعة خشب مقطعها مستطيل يتناسب طرديا مع حاصل ضرب أحد بعدى المستطيل فى مربع بعده الأخر أوجد بعدى المقطع لقطعة خشبية ذات اكبر قوة احتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل إسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٠٠ سم

الحل

نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص ، قوى إحتمال قطعة الخشب = ق من الشكل المقابل و هو مقطع من " قطعة الخشب "إسطوانة دائرية



∵ ق ∝ س ص^{٢} ∴ ق = ك س ص^{٢} حيث : ك ثابت

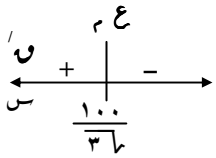
∵ ص^{٢} = ١٠٠٠٠ – س^{٢} (١)

∴ ق = ١٠٠٠٠ ك س – ك س^{٣}

∴ ق$^{/}$ = ١٠٠٠٠ ك – ٣ ك س^{٢} ، ق$^{//}$ = – ٦ ك س

∵ ق$^{/}$ = ٠ عندما س = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

ق$^{//}$ < ٠ عندما س = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

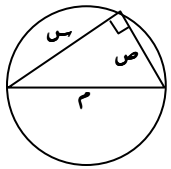


∴ ق تكون أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}}{٣}$

، من (١) ينتج : بعدى المستطيل هما : $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١٠٠}{\sqrt{٦}}$ سم

تتحرك نقطة على محيط دائرة طول قطرها ١٠ سم أوجد بعدى النقطة عن طرفى قطر الدائرة بحيث يكون مجموع بعديهما أكبر ما يمكن

الحل



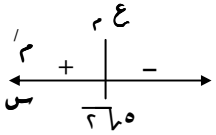
نفرض أن بعدى النقطة عن طرفى قطر الدائرة هما : س ، ص سم

∵ ص^{٢} = ١٠٠ – س^{٢} (١) أى أن : ص = (١٠٠ – س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

، ∵ المجموع (م) = س + ص = س + (١٠٠ – س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

∴ م/ = ١ + $\frac{1}{2}$ (١٠٠ − س^{٢})$^{-\frac{1}{2}}$ × (− ٢ س) = ١ − $\frac{\text{س}}{\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}}$

، م/ = ٠ عندما : ١ − $\frac{\text{س}}{\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}}$ أى عندما : س = ٥$\sqrt{٢}$



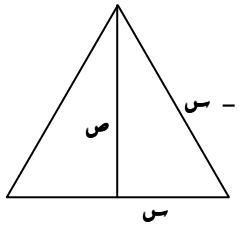
، ∵ م/ < ٠ عندما س < ٥$\sqrt{٢}$ ، م/ > ٠ عندما س > ٥$\sqrt{٢}$

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٥$\sqrt{٢}$ ، من (١) ينتج :

بعدى النقطة هما ٥$\sqrt{٢}$ ، ٥$\sqrt{٢}$ سم

أوجد أكبر مساحة لسطح مثلث متساوى الساقين محيطه ١٨ سم

الحل



نفرض أن طول قاعدة المثلث = ٢ س سم ، طول ساقه = ع سم

∵ محيطه = ١٨ سم ∴ ٢ س + ٢ ع = ١٨

∴ ع = ٩ − س سم

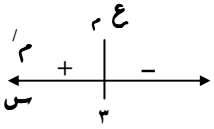
، ص^{٢} = (٩ − س)^{٢} − س^{٢} = ٨١ − ١٨ س + س^{٢} − س^{٢}

= ٨١ − ١٨ س ∴ ص = (٨١ − ١٨ س)$^{\frac{1}{2}}$ = ٣ (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$ (١)

مساحة المثلث (م) = $\frac{1}{2}$ × ٢ س ص = ٣ س (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$

∴ م/ = ٣ (٩ − ٢ س)$^{\frac{1}{2}}$ + ٣ س × $\frac{1}{2}$ × (٩ − ٢ س)$^{-\frac{1}{2}}$ × (− ٢)

= ٣ × ($\frac{٩ - ٢ \text{س} - \text{س}}{\sqrt{٩ - ٢ \text{س}}}$) = ٣ × ($\frac{٩ - ٣ \text{س}}{\sqrt{٩ - ٢ \text{س}}}$)



، م/ = ٠ عندما : ٩ − ٣ س أى عندما : س = ٣

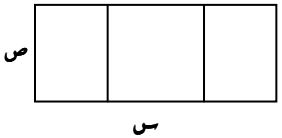
، ∵ م/ < ٠ عندما س > ٣ ، م/ > ٠ عندما س < ٣

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٣ ، من (١) ينتج : ص = ٣$\sqrt{٣}$

∴ م = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٣ × ٣$\sqrt{٣}$ = ٩$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

قطعة أرض مستطيلة مساحتها ٢٨٨٨ متراً مربعاً يراد إحاطتها بسور و تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء بعمل سورين متوازيين لأحد أضلاعها أوجد بعدى المستطيل بحيث يكون الطول الكلى للأسوار أقل ما يمكن

الحل



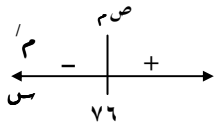
نفرض أن بعدى المستطيل هما س متر ، ص متر

∵ مساحة المستطيل = س ص = ٢٨٨٨ ∴ ص = $\frac{٢٨٨٨}{\text{س}}$ (١)

، طول السور = (م) = ٢ س + ٤ ص

= ٢ س + ٤ × ٢٨٨٨ × $\frac{1}{\text{س}}$

∴ م/ = ٢ − ٤ × ٢٨٨٨ × $\frac{1}{\text{س}^{٢}}$



، منها : م/ = ٠ عندما : ٢ س^{٢} = ٤ × ٢٨٨٨

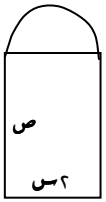
أى : س = ٧٦ ، ∵ م/ < ٠ عندما س < ٧٦ ، م/ > ٠ عندما س > ٧٦

∴ م تكون أقل ما يمكن عندما : س = ٧٦ و من (١) ينتج : ص = ٣٨

أى أن بعدى المستطيل هما ٧٦ متر ، ٣٨ متر

نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة = (٨ + ٢ ط) متراً و كانت النافذة تسمح بمرور أكبر كمية من الضوء أثبت أن طول قطر الدائرة = ٤ متر ، و أوجد البعد الآخر للمستطيل عندئذ

الحل



نفرض أن طول قطر نصف الدائرة = ٢ س متر ، البعد الآخر للمستطيل = ص متر

∴ ٨ + ٢ ط = ٢ س + ٢ ص + ط س

و منها : ٢ ص = ٨ + ٢ ط − ٢ س − ط س

= ٢ (٤ + ط) − (٢ + ط) س (١)

، مساحة النافذة = (م) = ٢ س ص + $\frac{1}{2}$ ط س^{٢} = س × ٢ ص + $\frac{1}{2}$ ط س^{٢}

= ٢ (٤ + ط) س − (٢ + ط) س^{٢} + $\frac{1}{2}$ ط س^{٢}

∴ م/ = (٨ + ٢ ط) − ٢ (٢ + ط) س + ط س = ٢ (٤ + ط) − (٤ + ط) س

، منها : م/ = ٠ عندما : س = ٢

∵ م/ < ٠ عندما س < ٢ ، م/ > ٠ عندما س > ٢

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٢

∴ ٢ س = ٤ أى أن : طول قطر الدائرة = ٤ متر

، من (١) ينتج : ص = ٢ متر

مثلث متساوى الساقين رأسه نقطة الأصل و قاعدته قطعة مستقيمة توازى محور السينات و تقع فوقه و يقع طرفاها على المنحنى ١٢ ص = ٣٦ − س٢ عين أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

الحل

الشكل المقابل : يمثل المنحنى و المثلث

حيث : ص = ٣ − $\frac{١}{١٢}$ س٢ (١)

، مساحة النافذة = (م) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ س ص = س ص

= س (٣ − $\frac{١}{١٢}$ س٢) = ٣ س − $\frac{١}{١٢}$ س٣

م/ = ٣ − $\frac{١}{٤}$ س٢ ، م// = − $\frac{١}{٢}$ س

∵ م/ = ٠ عندما : ٣ − $\frac{١}{٤}$ س٢ و منها : س = ٢ $\sqrt{٣}$

، م// < ٠ عندما : س = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ م تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٢ $\sqrt{٣}$ ، من (١) ينتج : ص = ٢

∴ م = س ص = ٢ $\sqrt{٣}$ × ٢ = ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

سلك طوله ل سم قطع إلى جزئين و ثنى احدهما على شكل مربع و ثنى الآخر على شكل مثلث متساوى الأضلاع أوجد النسبة بين طولى الجزئين حتى يكون مجموع مساحتى المربع و المثلث أصغر ما يمكن

الحل

نفرض أن : طول ضلع المربع = س سم ، طول ضلع المثلث = ص سم

∴ ل = ٤ س + ٣ ص و منها : ص = $\frac{١}{٣}$ (ل − ٤ س) (١)

مجموع مساحتى المربع و المثلث (م) = س٢ + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ص٢

∴ م = س٢ + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (ل٢ − ٨ ل س + 16 س٢)

∴ م/ = ٢ س + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (− ٨ ل + ٣٢ س) ، م// = ٢ + ٣٢ $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$

، ∵ م/ = ٠ عندما : ٢ س + $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ (− ٨ ل + ٣٢ س)

و منها : س = $\frac{٣\sqrt{٣}\ ل}{٩ + ٤\sqrt{٣}}$ و حيث أن عندها م// < ٠

و من (١) : ص = $\frac{٣\ ل}{٩ + ٤\sqrt{٣}}$ ∴ س : ص = ٣ : ٣ $\sqrt{٣}$

∴ النسبة بين طولى الجزئين = ٤ س : ٣ ص = ٤ $\sqrt{٣}$: ٩

إذا كان ف هو بعد النقطة (١ ، ٠) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ أوجد الإحداثيات (س ، ص) لهذه النقطة التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل

∵ ص = $\sqrt{س}$ (١)

∴ ف٢ = (س − ١)٢ + ص٢ = س٢ − ٢ س + ١ + س = س٢ − س + ١

∴ ف = (س٢ − س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ ف/ = $\frac{٢ س − ١}{٢\sqrt{س٢ − س + ١}}$

، ف/ = ٠ عندما : ٢ س − ١ أى عندما : س = $\frac{١}{٢}$

، ∵ ف/ < ٠ عندما س < $\frac{١}{٢}$ ، ف/ > ٠ عندما س > $\frac{١}{٢}$

∴ ف تكون أكبر ما يمكن عندما : س = $\frac{١}{٢}$ ، من (١) ينتج : ص = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

قضيب رفيع طوله ١ متراً مثبت من أحد طرفيه و ترك ليتذبذب كالبندول فإذا كانت مقاومة القضيب للكسر عند نقطة تبعد س من نقطة التعليق تساوى م س (١ − س)٢ حيث م مقدار سالب أوجد النقطة التى تكون عندها المقاومة أقل ما يمكن

الحل

∵ المقاومة (م) = أ س (١ – س)^{٢} ∴ م$'$ = أ (١ – س)^{٢} – ٢ أ س (١ – س)

، م$'$ = ٠ عندما : أ (١ – س)^{٢} – ٢ أ س (١ – س) أى عندما : س = $\frac{١}{٣}$

، ∵ م$'$ > ٠ عندما س < $\frac{١}{٣}$ ، م$'$ < ٠ عندما س > $\frac{١}{٣}$ (أ مقدار سالب)

∴ م تكون أقل ما يمكن عندما : س = $\frac{١}{٣}$

جسم مكون من إسطوانة تعلوه نصف كرة تشتركان فى القاعدة العليا للإسطوانة فإذا كانت المساحة الكلية الخارجية للجسم = ٢٠٠٠ ط سم^{٢} و كان حجم الجسم قيمة عظمى أوجد إرتفاع الإسطوانة و طول نصف قطر قاعدتها

الحل

المساحة الكلية الخارجية للجسم = (م) = $\frac{١}{٣}$ (المساحة الكلية للإسطوانة + مساحة الكرة)

= $\frac{١}{٣}$ ([٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢}] + ٤ ط نق^{٢}) = ط نق ع + ٣ ط نق^{٢}

∴ ٢٠٠٠ ط = ط نق ع + ٣ ط نق^{٢} و منها : ع = $\frac{٢٠٠٠}{نق}$ – $\frac{٣}{٤}$ نق (١)

∴ حجم الجسم (ح) = ط نق^{٢} ع + $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} بالتعويض من (١)

∴ ح = ٢٠٠٠ ط نق – ٣ ط نق^{٣} + $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} بالإشتقاق بالنسبة إلى نق

∴ ح$'$ = ٢٠٠٠ ط – ٩ ط نق^{٢} + ٤ ط نق^{٢} = ٢٠٠٠ ط – ٥ ط نق^{٢}

، ح$''$ = – ١٠ ط نق

، ∵ ح$'$ = ٠ عندما : ٢٠٠٠ ط – ٥ ط نق^{٢} = ٠

أى : نق = ٢٠ و عندها : ح$''$ < ٠ ∴ نق = ٢٠ تجعل ح قيمة عظمى

∴ نق = ٢٠ سم ، بالتعويض فى (١) ينتج : ع = ٤٠ سم

قطعة ارض على شكل شبه منحرف أ ب حـ ء فيه أ ب // حـ ء ، ب حـ ⊥ أ ب و كان أ ب : ب حـ : حـ ء = ٣ : ٤ : ١ ، يراد بناء عمارة على قطعة مستطيلة الشكل فأخذت نقطة و على أ و و أسقط منها و هـ ⊥ أ ب ، و ى ⊥ ب حـ أثبت أن أكبر مساحة لسطح المستطيل = $\frac{٩}{١٦}$ من مساحة سطح قطعة الأرض

الحل

نفرض أن أبعاد المستطيل : ب هـ = س ، و هـ = ص

من هندسة الشكل المقابل : Δ أ هـ و ~ Δ أ ى ء

و حيث : أ ب = ٣ ل ، ب حـ = ٤ ل ، حـ ء = ل

∴ $\frac{٣ ل – س}{٣ ل}$ = $\frac{ص}{٤ ل}$ و منها : ص = ٦ ل – ٢ س (١)

، مساحة المستطيل = (م) = س ص = س (٦ ل – ٢ س) = ٦ ل س – ٢ س^{٢}

∴ م$'$ = ٦ ل – ٤ س ، م$''$ = – ٤

، ∵ م$'$ = ٠ عندما : س = $\frac{٣}{٤}$ ل و عندما : م$''$ < ٠

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ل تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

من (١) : ص = ٣ ل ∴ مساحة المستطيل (م) = $\frac{٩}{٤}$ ل^{٢}

، مساحة قطعة الأرض (ل) = $\frac{١}{٢}$ (ل + ٣ ل) × ٤ ل = ٨ ل^{٢}

∴ م : ل = $\frac{٩}{٤}$ ل^{٢} : ٨ ل^{٢} = ٩ : ١٦ أى أن : م = $\frac{٩}{١٦}$ ل

ثمن البيع لسلعة ما هو ١٠٠ – ٠,٠٢ س جنيهاً لكل وحدة من هذه السلعة حيث س هو العدد المنتج من هذه السلعة فإذا كانت تكلفة إنتاج س وحدة منها = ٤٠ س + ١٥٠٠٠ جنيهاً أوجد عدد السلع الواجب إنتاجها لجعل الربح أكبر ما يمكن

الحل

الربح = (ر) = س (١٠٠ – ٠,٠٢ س) – (٤٠ س + ١٥٠٠٠)

= ٦٠ س – ٠,٠٢ س^{٢} – ١٥٠٠٠

∴ ر$'$ = ٦٠ – ٠,٠٤ س ، ر$''$ = – ٠,٠٤

، ∵ ر$'$ = ٠ عندما : ٦٠ – ٠,٠٤ س أى : س = ١٥٠٠ و عندما : ر$''$ < ٠

∴ س = ١٥٠٠ يكون عندها ر أكبر ما يمكن

أى من الواجب أن ينتج المصنع ١٥٠٠ وحدة ليحقق أكبر ربح

التكامل

* **تعريف :**
* إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت/ (س) = د (س) فإن : ت (س) تسمى دالة المشتقة العكسية للدالة د أو دالة أصلية مقابلة للدالة د
* $\int$ د (س) ء س = ت (س) إذا و فقط إذا كان : ت/ (س) = د (س)

* **نظريات :**
* $\int$ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث : ن ≠ − ١ ، ث ثابت
* $\int$ (أ س + ب)^{ن} ء س = $\frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{أ (ن+1)}$ + ث

حيث : ن ≠ − ١ ، أ ، ب ، ث ثوابت

* **خصائص التكامل :**
* $\int$ أ س^{ن} ء س = $\frac{أ س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث : ن ≠ − ١ ، أ ، ث ثوابت
* $\int$ [د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س)] ء س = $\int$ د$_{١}$ (س) ء س ± $\int$ د$_{٢}$ (س) ء س

* **ملاحظات و نتائج :**
* $\int$ ء س = س + ث
* $\int$ أ س ء س = أ س + ث
* برهان النظريات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر
* يكفى إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية
* يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل

* **فصل المتغيرات :**
* إذا كان : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{د (س)}{ر (ص)}$ فإن : $\int$ ر (ص) ء ص = $\int$ د (س) ء س
* إذا كان : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ك (س) فإن : ص = $\int$ ك (س) ء س

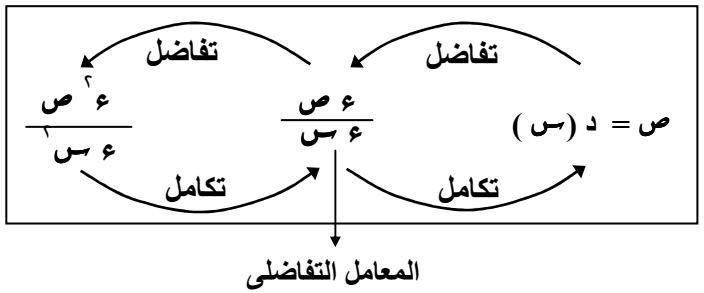
* **تكاملات بعض الدوال المثلثية :**
* $\int$ حا س ء س = − حتا س + ث
* $\int$ حتا س ء س = حا س + ث
* $\int$ قا^{٢} س ء س = طا س + ث
* $\int$ حا (أ س + ب) ء س = − $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث
* $\int$ حتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث
* $\int$ قا^{٢} (أ س + ب) ء س = − $\frac{١}{أ}$ طا (أ س + ب) + ث

* **التطبيق الهندسى للتكامل :**
إذا كان : ص = د (س) هى معادلة منحنى فإن : ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) تقع عليه = ص/ = د/ (س) و بالتالى تكون معادلته هى :

د (س) = $\int$ د/ (س) ء س

* **ملاحظة :**
من هذا التكامل نحصل على معادلة عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أى نقطة معينة للإحداثى السينى س و تحديد أحد هذه المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافى كأن يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءً معيناً من أحد المحورين أو ٠٠٠٠ الخ

* **العلاقة بين عملية التفاضل و عملية التكامل :**



تمارين محلولة

أحسب : $\int (٣س - ٥)(س + ١)\, ع س$

الحل

$\int (٣س^{٢} - ٢س - ٥)\, ع س = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٥س + ث$

أحسب : $\int \frac{(٢س - ١)(٣ - ٢س)}{س^{٤}}\, ع س$

الحل

$\int س^{-٤}(٣ + ٤س - ٤س^{٢})\, ع س = \int (٣س^{-٤} + ٤س^{-٣} - ٤س^{-٢})\, ع س$

$= -س^{-٣} + ٢س^{-٢} + ٤س^{-١} + ث$

أحسب : $\int س^{١٠}(\frac{٧}{س} - \frac{١}{س^{٢}})^{٥}\, ع س$

الحل

$\because س^{١٠} = (س^{٢})^{٥}$

$\therefore \int (٧س - ١)^{٥}\, ع س = \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٦}(٧س - ١)^{٦} + ث = \frac{١}{٤٢}(٧س - ١)^{٦} + ث$

أحسب : $\int \frac{(٩ - ٣٠س + ٢٥س^{٢})^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt{٣ - ٥س}}\, ع س$

الحل

$\int \frac{(٣ - ٥س)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ - ٥س)^{\frac{١}{٢}}}\, ع س = \int (٣ - ٥س)^{\frac{١}{٢}}\, ع س = -\frac{٦}{٧} \times \frac{١}{٥}(٣ - ٥س)^{\frac{٧}{٢}} + ث$

$= -\frac{٦}{٣٥}(٣ - ٥س)^{\frac{٧}{٢}} + ث$

أحسب : $\int (س - \frac{١}{س})(س + \frac{١}{س})(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})\, ع س$

الحل

$\int (س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})\, ع س = \int (س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}})\, ع س$

$= \frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{-٣} + ث$

أحسب : $\int (س + ١)\sqrt{٣س + ٥}\, ع س$

الحل

$\frac{١}{٣}\int (٣س + ٣)(٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}}\, ع س$

$= \frac{١}{٣}\int (٣س + ٥ - ٢)(٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}}\, ع س$

$= \frac{١}{٣}\int (٣س + ٥)(٣س + ٥)^{\frac{٣}{٢}}\, ع س - \frac{٢}{٣}\int (٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}}\, ع س$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣}(٣س + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}(٣س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{١٤٥}(٣س + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٩٣}(٣س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

أحسب : $\int [قا^{٢}(\frac{١}{٢}س + ٥) + حتا(٢س + ١)]\, ع س$

الحل

$\int [قا^{٢}(\frac{١}{٢}س + ٥) + حتا(٢س + ١)]\, ع س$

$= ٢ طا(\frac{١}{٢}س + ٥) + \frac{١}{٢}حا(٢س + ١) + ث$

أحسب : $\int قاس(٣ حتاس - ٢ قاس)\, ع س$

الحل

$\int (٣ - ٢قا^{٢}س)\, ع س = ٣ - ٢ طاس + ث$

أحسب : $\int ٦ حاس حتاس\, ع س$

الحل

$٣\int ٢ حاس حتاس\, ع س = ٣\int حا٢س\, ع س = \frac{٣}{٢}$ حتا ٢س $+ ث$

احسب : $\int \frac{\text{حتا}^2 س}{1 + \text{حا} س}$ ء س

الحل

∵ حتا^2 س = ١ ـ حا^2 س = (١ ـ حا س) (١ + حا س)

∴ $\int$ (١ + حا س) ء س = س + حتا س + ث

$\int$ (حتا^2 س + ظا^2 س) ء س

الحل

$\int$ [$\frac{1}{2}$ (١ + حتا ٢ س) + (قا^2 س ـ ١)] ء س

= $\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{4}$ حا ٢ س + ظا س ـ س + ث

إذا كانت المشتقة الأولى للدالة د تساوى س^{17} ($\frac{1}{س}$ + $\frac{1}{س^2}$)^8 أوجد : د (٠) ـ د (ـ ١)

الحل

∵ س^{17} = س (س^2)^8

∴ د (س) = $\int$ س (س + ١)^8 ء س = $\int$ (س + ١ ـ ١) (س + ١)^8 ء س

= $\int$ (س + ١)^9 ء س ـ $\int$ (س + ١)^8 ء س

= $\frac{1}{10}$ (س + ١)^{10} ـ $\frac{1}{9}$ (س + ١)^9 + ث

∴ د (٠) ـ د (ـ ١) = ($\frac{1}{10}$ ـ $\frac{1}{9}$ + ث) ـ (٠ + ث) = ـ $\frac{1}{90}$

أوجد الدالة التى يكون معدل تغيرها بالنسبة إلى س عند أى لحظة هو : ٣ س^2 + ٤ س ـ ٤ و قيمتها = ٨ عند س = ـ ٢

الحل

د (س) = $\int$ (٣ س^2 + ٤ س ـ ٤) ء س = س^3 + ٢ س^2 ـ ٤ س + ث

، ∵ د (س) = ٨ عند س = ـ ٢

∴ ٨ = ـ ٨ + ٨ + ٨ + ث ∴ ث = ٠

∴ د (س) = ٣ س^2 + ٤ س ـ ٤

إذا كان : $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ ـ ٣ س^2 ، $\frac{ع ع}{ع س}$ = ٥ ـ ٤ ص و كانت ص = ٠ ، ع = ١٢

عندما س = ١ أثبت أن : ع = س^4 ـ ٨ س^2 + ١٧ س + ٢

الحل

ص = $\int$ (٤ ـ ٣ س^2) ء س = ٤ س ـ س^3 + ث

∴ ٠ = ٤ ـ ١ + ث ∴ ث = ـ ٣ ∴ ص = ٤ س ـ س^3 ـ ٣

، ع = ٥ $\int$ [ـ ٤ (٤ س ـ س^3 ـ ٣)] ء س = $\int$ (١٧ ـ ١٦ س + ٤ س^3) ء س

= ١٧ س ـ ٨ س^2 + س^4 + ث$_٢$

∴ ١٢ = ١٧ ـ ٨ + ١ + ث$_٢$ ∴ ث$_٢$ = ٢ ∴ ع = س^4 ـ ٨ س^2 + ١٧ س + ٢

إذا كان : $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٥ - ٦ س}{٢ ص}$ ، ص = ٢ عندما س = ١ أوجد العلاقة بين س ، ص

الحل

$\int$ ٢ ص ء ص = $\int$ (٥ ـ ٦ س) ء س

∴ ص^2 = ٥ س ـ ٣ س^2 + ث ∴ ٤ = ٥ ـ ٣ + ث ∴ ث = ٢

∴ ص^2 = ٥ س ـ ٣ س^2 + ٢

إذا كانت د (س) معرفة على ح و تحقق العلاقة د (١) = ١ ، د (٢) = ١٠ ،

د (ى + هـ) ـ د (ى) = ل هـ ى ـ ٢ هـ^2 حيث : ل ، هـ ، ى ثوابت أوجد د (س)

الحل

∵ د (ى + هـ) ـ د (ى) = ل هـ ى ـ ٢ هـ^2 ∴ $\frac{د (ى + هـ) - د (ى)}{هـ}$ = ل ى ـ ٢ هـ

∴ نهـــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (ى + هـ) - د (ى)}{هـ}$ = نهـــا$_{هـ \to ٠}$ (ل ى ـ ٢ هـ) = ل ى

∴ د$'$ (ى) = ل ى ∴ د$'$ (س) = ل س

∴ $\int$ د (س) ء س = $\int$ ل س ء س ∴ د (س) = $\frac{1}{2}$ ل س^2 + ث

، ∵ د (١) = ١ ، د (٢) = ١٠

∴ ١ = = $\frac{1}{3}$ ل + ث ، ١٠ = = ٢ ل + ث

، بحل المعادلتين معاً ينتج : ل = ٦ ، ث = ـ ٢ ∴ د (س) = ٣ س^{٢} ـ ٢

إذا كان : ميل المماس لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو س^{٢} ـ ٤ س + ٣ و كان لمنحنى الدالة قيمة صغرى محلية تساوى ـ ٨ أوجد القيمة العظمى المحلية إن وجدت

الحل

∵ ص$^{/}$ = س^{٢} ـ ٤ س + ٣ = (س ـ ٣) (س ـ ١)

، ص$^{/}$ = ٠ عندما : س = ٣ ، س = ١ ، ص$^{//}$ = ٢ س ـ ٤

∴ ص$^{//}$ (٣) = ٢ > ٠ ∴ نقطة القيمة الصغرى المحلية هى (٣ ، ـ ٨)

، ص$^{//}$ (١) = ـ ٢ < ٠ ∴ عند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ـ ٨)

، ص = ∫ (س^{٢} ـ ٤ س + ٣) ء س = $\frac{1}{3}$ س^{٣} ـ ٢ س^{٢} + ٣ س + ث

∴ ـ ٨ = ٩ ـ ١٨ ـ ٩ + ث ∴ ث = ـ ٨

∴ ص = $\frac{1}{3}$ س^{٣} ـ ٢ س^{٢} + ٣ س ـ ٨ ، عند : س = ١ فإن : ص = ـ $\frac{٢٠}{٣}$

إذا كان : ميل العمودى لمنحنى دالة عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو $\frac{ص + ٤}{٣ - س}$

و كان المنحنى يمر بنقطة الأصل أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ ميل العمودى = $\frac{ص + ٤}{٣ - س}$ ∴ ميل المماس ($\frac{ء ص}{ء س}$) = $\frac{٣ - س}{ص + ٤}$

∴ ∫ (ص + ٤) ء ص = ∫ (٣ ـ س) ء س

∴ $\frac{1}{2}$ ص^{٢} + ٤ ص = ٣ س ـ $\frac{1}{2}$ س^{٢} + ث ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

∴ ث = ٠ ، معادلة المنحنى هى : $\frac{1}{2}$ ص^{٢} + ٤ ص = ٣ س ـ $\frac{1}{2}$ س^{٢}

منحنى يمر بنقطة الأصل و ميل المماس عند أى نقطة عليه هو (١ ـ حتا ٢ س) أوجد معادلته

الحل

∵ ص$^{/}$ = ١ ـ حتا ٢ س

∴ ص = ∫ (١ ـ حتا ٢ س) ء س = س ـ $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ∴ ٠ = ٠ ـ $\frac{1}{2}$ حا ٠ + ث ∴ ث = ٠

∴ ص = س ـ $\frac{1}{2}$ حا ٢ س

إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو (٦ س ـ ٢) و كان المماس عند النقطة (٣ ، ١) الواقعة عليه موازياً للمستقيم ص ـ ٢ س + ٥ = ٠ أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٦ س ـ ٢ ∴ م = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ س^{٢} ـ ٢ س + ث

، ∵ ميل المستقيم الموازى للمماس = ٢ ∴ م عند (٣ ، ١) = ٢

∴ ٢ = ٢٧ ـ ٦ + ث ∴ ث = ـ ١٩ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ س^{٢} ـ ٢ س ـ ١٩

∴ ص = س^{٣} ـ س^{٢} ـ ١٩ س + ث$_{١}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ١) ∴ ث$_{١}$ = ٤٠

∴ ص = س^{٣} ـ س^{٢} ـ ١٩ س + ٤٠

ميل منحنى ما عند أى نقطة عليه يتناسب طردياً مع مربع الإحداثى السينى فإذا كان ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ـ ١) هو ١٢ أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ م ∝ س^{٢} ∴ م = ل س^{٢} ، ∵ م = ١٢ عند (١ ، ـ ١)

∴ ١٢ = ل × ١ و منها : ل = ١٢ ∴ م = ١٢ س^{٢}

∴ ص = ∫ ١٢ س^{٢} ء س = ٤ س^{٣} + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ـ ١) ∴ ث = ـ ٥

∴ ص = ٤ س^{٣} ـ ٥

إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو م = ٣ س^{٢} – ل س حيث ل ثابت
اوجد معادلة المنحنى علماً بان النقطة (١ ، ٢) نقطة إنقلاب له

الحل

∵ م = $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ س^{٢} – ل س ∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٦ س – ل

، ∵ (١ ، ٢) نقطة إنقلاب ∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠ عند س = ١

∴ ٦ × ١ – ل = ٠ و منها : ل = ٦ ∴ م = ٣ س^{٢} – ٦ س

∴ ص = ∫ (٣ س^{٢} – ٦ س) ع س = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) ∴ ث = ٤

∴ ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٤

أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان ص$''$ = ل س + ل و للمنحنى نقطة إنقلاب
عند (٠ ، ٢) و قيمة عظمى محلية عند (– ١ ، ٤)

الحل

∵ (٠ ، ٢) نقطة إنقلاب ∴ ص$''$ = ٠ عند س = ٠

∴ ل × ٠ – ل = ٠ ∴ ل = ٠

∴ ص$''$ = ل س ∴ ص$'$ = ∫ ل س ع س = $\frac{١}{٢}$ ل س^{٢} + ث

، ∵ (– ١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية ∴ ص$'$ = ٠ عند س = – ١

∴ ٠ = $\frac{١}{٢}$ ل + ث ∴ ث = – $\frac{١}{٢}$ ل ∴ ص$'$ = $\frac{١}{٢}$ ل س^{٢} – $\frac{١}{٢}$ ل

∴ ص = ∫ ($\frac{١}{٢}$ ل س^{٢} – $\frac{١}{٢}$ ل) ع س = $\frac{١}{٢}$ ل س^{٣} – $\frac{١}{٢}$ ل س + ث$_{١}$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (– ١ ، ٤)

∴ ٢ = ٠ – ٠ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = ٢

، ٤ = $\frac{١}{٢}$ ل + $\frac{١}{٢}$ ل + ث$_{١}$ ∴ ٤ = $\frac{١}{٢}$ ل + $\frac{١}{٢}$ ل + ٢

و منها : ل = ٦ ∴ ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٢

وعاء سعته ١٤٠٠ سم^{٣} كان فارغاً ثم صب فيه الماء تدريجياً بمعدل (٢ ر + ٥٠) سم^{٣} / ث
حيث ر الزمن أوجد الزمن اللازم لإمتلاء الوعاء

الحل

∵ $\frac{ع ح}{ع ر}$ = ٢ ر + ٥٠

∴ ح = ∫ (٢ ر + ٥٠) ع ر = ر^{٢} + ٥٠ ر + ث

و عندما كان الوعاء فارغاً فإن : ح = ٠ ، ر = ٠ ∴ ث = ٠

∴ ح = ر^{٢} + ٥٠ ر

، عندما يمتلئ الوعاء فإن : ح = ١٤٠٠

∴ ١٤٠٠ = ر^{٢} + ٥٠ ر ∴ ر^{٢} + ٥٠ ر – ١٤٠٠ = ٠

∴ (ر – ٢٠) (ر + ٧٠) = ٠ ∴ ر = ٢٠ ث

إذا كان لدالة ما $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{\frac{١}{٢} س^{٢} + س + ١}{\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص + ١}$ أثبت أن :

$\frac{س - ص}{\lfloor ١}$ + $\frac{س^{٢} - ص^{٢}}{\lfloor ٢}$ + $\frac{س^{٣} - ص^{٣}}{\lfloor ٣}$ = مقدار ثابت

الحل

∫ ($\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + ص + ١) ع ص = ∫ ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ١) ع س

$\frac{١}{٢}$ ص^{٣} + $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ث

∴ (س – ص) + $\frac{١}{٢}$ × (س^{٢} – ص^{٢}) + $\frac{١}{٦}$ × (س^{٣} – ص^{٣}) = ث

∴ $\frac{س - ص}{١}$ + $\frac{س^{٢} - ص^{٢}}{١ \times ٢}$ + $\frac{س^{٣} - ص^{٣}}{١ \times ٢ \times ٣}$ = مقدار ثابت

∴ $\frac{س - ص}{\lfloor ١}$ + $\frac{س^{٢} - ص^{٢}}{\lfloor ٢}$ + $\frac{س^{٣} - ص^{٣}}{\lfloor ٣}$ = مقدار ثابت