المميز

فى

ملخص قوانين

الرياضيات

الصف الثالث الثانوى

٢٠١٣

أ. أحمد الشتتورى

الجبر

التباديل و التوافيق

قوانين التباديل

* $^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-1)\,(ن-2)\cdots(ن-ر+1)$

حيث : $1 \le ر \le ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كان الطرف الأيسر عدد ليكن ل :

(1) إذا علم ر : نحلل ل إلى عوامل ثم كتابة هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

(2) إذا علم ن : نقسم ل على ن ثم على العدد السابق له مباشرة فالسابق له مباشرة و هكذا حتى نحصل على الواحد الصحيح ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ر

* $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ حيث : $1 \le ر \le ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا تساوت تبديلتين و علم ن أو ر بإختصار المضروبات

* $ن! = {}^{ن}ل_{ن} = ن\,(ن-1)\,(ن-2)\cdots\times 3\times 2\times 1$

(1) إذا علم الطرف الأيسر نقسمه على 1 ثم على 2 ثم على 3 ثم ... ثم على م حتى نحصل على العدد 1 فيكون : ن = م

(2) إذا علم ن : نوجد الناتج بضرب ن فى الأعداد السابقة له حتى العدد 1

* $ن! = ن\,(ن-1)! = ن\,(ن-1)\,(ن-2)! = \cdots\cdots$

و يستخدم لإختصار المضروبات

* $ن! = {}^{ن}ل_{0} = 1! = 1$

قوانين التوافيق

* $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$ ؛ أى $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}\; ر!$

حيث : $1 \le ر \le ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كانت ر معلومة بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامل ثم كتابة هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

* $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$ حيث : $1 \le ر \le ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كانت ر غير معلومة بإختصار المضروبات

* $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ يستخدم لتبسيط التوفيق العددى إذا كان : $ر > \frac{1}{2}ن$

* إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن : ر = هـ أو ر + هـ = ن

* $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن-ر+1}{ر}$ يستخدم لإيجاد النسبة بين $^{ن}ق_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر-1}$

* لإيجاد النسبة بين $^{ن}ق_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر-2}$ نقسم كلاً من التوفيقتين على $^{ن}ق_{ر-1}$

* $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$

نظرية ذات الحدين

** إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(أ + ب)^{ن} = ق^{ن}_{٠} أ^{ن} + ق^{ن}_{١} أ^{ن-١} ب + ق^{ن}_{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + ق^{ن}_{٣} أ^{ن-٣} ب^{٣} + \cdots + ق^{ن}_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} + \cdots + ق^{ن}_{ن} ب^{ن}$$

** ملاحظات :

* $$(أ - ب)^{ن} = ق^{ن}_{٠} أ^{ن} - ق^{ن}_{١} أ^{ن-١} ب + ق^{ن}_{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} - ق^{ن}_{٣} أ^{ن-٣} ب^{٣} + \cdots + ق^{ن}_{ر} أ^{ن-ر} (-ب)^{ر} + \cdots + ق^{ن}_{ن} (-ب)^{ن}$$

* إذا كان : $س \in ح$ ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(١ + س)^{ن} = ١ + ق^{ن}_{١} س + ق^{ن}_{٢} س^{٢} + \cdots + ق^{ن}_{ر} س^{ر} + \cdots + ق^{ن}_{ن} س^{ن}$$ " مرتب حسب قوى س التصاعدية "

، $$(١ - س)^{ن} = ١ - ق^{ن}_{١} س + ق^{ن}_{٢} س^{٢} + \cdots + ق^{ن}_{ر} (-س)^{ر} + \cdots + ق^{ن}_{ن} (-س)^{ن}$$ " مرتب حسب قوى س التصاعدية "

* $$(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \cdots)$$

، $$(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \cdots)$$

** الحد العام فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$:

$$ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر}$$ " يستخدم لإيجاد أى حد فى المفكوك "

** إذا كانت : ن فردية مفكوك $(س + أ)^{ن}$ فإن : رتبة الحد الأوسط هى : $\frac{١}{٢} ن + ١$

** إذا كانت : ن زوجية مفكوك $(س + أ)^{ن}$

فإن : رتبا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢} (ن + ١)$ ، $\frac{١}{٢} (ن + ٣)$

** لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ نتبع ما يلى :

* نفرض أن $ح_{ر+١}$ الحد المشتمل على $س^{ك}$ ثم نكتبه فى بسط صورة

* نضع أس س = ك فنحصل على قيمة ر بشرط : $ر \in ط$

* نعوض بقيمة ر فى $ح_{ر+١}$ لنحصل على الحد المشتمل على $س^{ك}$

** ملاحظات :

* الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى المقدار $س^{م} (س + أ)^{ن}$
هو الحد المشتمل على $س^{م}$ × الحد المشتمل على $س^{ك+م}$ فى المفكوك

* الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى المقدار $(س + أ)^{ن} \pm (س + ع)^{ن}$
هو الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى كلاً من المفكوكين

* الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى المقدار $(س + أ)^{ن} (س + ع)^{ل}$
هو الحد المشتمل على $س^{م+ل}$ فى كل حد من حدود المقدار

** النسبة بين $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر}$ فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$:

$$\frac{ح^{ن}_{ر+١}}{ح^{ن}_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

** ملاحظات :

* لإيجاد النسبة بين الحدين $ح_{ر+٢}$ ، $ح_{ر}$ نقسم كلاً الحدين على $ح_{ر+١}$

* لاحظ الفرق بين $$\frac{ح^{ن}_{ر+١}}{ح^{ن}_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

$$\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

الأعداد المركبة

** العدد التخيلى ت

* $ت^2 = -1$
* القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم : ت ، -١ ، -ت ، ١
* قيم العدد ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤
* لإيجاد $ت^ن$ حيث ن ∈ ص نقسم ن على ٤ فيكون :

$ت^ن$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

باقى القسمة	٠	١	٢	٣	ملاحظة	
القيمة	١	ت	-١	-ت	$ت^{-1} = ت^3 = -ت$	$ت^{-3} = ت$

** مجموعة الأعداد التخيلية

هى مجموعة من الأعداد رمزها ت ، و وحدتها ت

** مجموعة الأعداد المركبة

ك = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، $ت^2 = -1$ }

* تساوى عددين مركبين

$س_1 + ت ص_1 = س_2 + ت ص_2$ فإن : $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$

* إذا كان : س + ت ص = ٠ فإن : س = ٠ ، ص = ٠
* مجموع عددين مركبين

إذا كان : $س_1 + ت ص_1 + س_2 + ت ص_2 = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2)$ ت

* حاصل ضرب عددين مركبين

$(س_1 + ت ص_1)(س_2 + ت ص_2) =$

$(س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + (س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$ ت

* خصائص جمع و ضرب الأعداد المركبة
* كلاً من عمليتى الجمع والضرب إبدالية و دامجة فى ك
* الصفر هو المحايد الجمعى ، الواحد الصحيح هو المحايد الضربى فى ك
* الضرب توزيعى على الجمع فى ك
* المعكوس الجمعى للعدد : ع = س + ت ص هو العدد : -ع = -س - ت ص

أى أن : ع + (-ع) = ٠ لكل ع ∈ ك

* الطرح فى ك : $ع_1 - ع_2 = ع_1 + (-ع_2)$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك
* المعكوس الضربى للعدد : ع = س + ت ص ≠ ٠ هو العدد :

$ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2}$ ت حيث : $س^2 + ص^2 \neq 0$

أى أن : ع $(\frac{1}{ع}) = 1$ لكل ع ∈ ك

* القسمة فى ك : $\frac{ع_1}{ع_2} = ع_1 \times (\frac{1}{ع_2})$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك

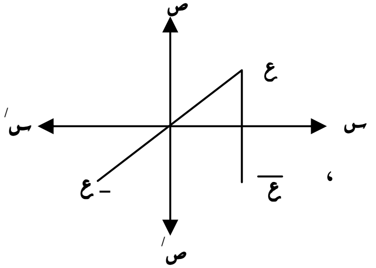
يمكن إيجاد ناتج القسمة بضرب كلاً من المقسوم و المقسوم عليه فى العدد المرافق للمقسوم عليه

* العددان المترافقان

إذا كان : ع = س + ت ص فإن : $\bar{ع}$ = س - ت ص مرافق للعدد ع

* خواص العددان المترافقان
* مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقى = ٢ س
* حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقى = $س^2 + ص^2$
* المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما
* المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما
* إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعداد حقيقية و كان أحد جذورها عدد مركب فإن مرافق هذا العدد يكون أيضاً جذر لهذه المعادلة

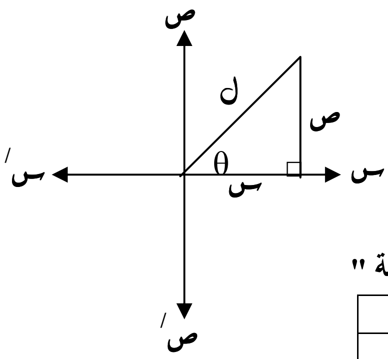
* التمثيل البيانى للأعداد المركبة " أشكال أرجاند "



الشكل المقابل : يسمى شكل أرجاند يوضح تمثيل
النقطة (س ، ص) تمثل العدد : ع = س + ت ص ،
النقطة (-س ، -ص) تمثل معكوسه الجمعى :
-ع = -س - ت ص ، النقطة (س ، -ص)
مرافقه : $\bar{ع}$ = س - ت ص

و يلاحظ : النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و معكوسه الجمعى متماثلتان بالنسبة لنقطة الأصل ، النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و مرافقه متماثلتين بالنسبة لمحور السينات

* الصور المختلفة للعدد المركب



* الصورة الجبرية : ع = س + ت ص
* الصورة المثلثية : ع = ل (حتا θ + ت حا θ)

حيث : ل = | ع | = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

، س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ

، θ ∈] ٠ ، ٢ ط] " السعة الأساسية "

س	+	–	–	+
ص	+	+	–	–
موقع θ	الأول	الثانى	الثالث	الرابع

* الصورة الأسية (صورة أويلر) : ع = ل هـ$^{ت θ}$
* فى الشكل السابق : النقطة (س ، ص) أو (ل ، θ) تمثل العدد :

ع = س + ت ص أو ع = ل (حتا θ + ت حا θ)

* الصور المثلثية لقوى العدد ت :
* ١ = (حتا ٠ + ت حا ٠) " تمثله النقطة (١ ، ٠)
* – ١ = (حتا ط + ت حا ط) " تمثله النقطة (– ١ ، ٠)
* ت = (حتا $\frac{١}{٢}$ ط + ت حا $\frac{١}{٢}$ ط) " تمثله النقطة (٠ ، ١)
* – ت = (حتا $\frac{٣}{٢}$ ط + ت حا $\frac{٣}{٢}$ ط) " تمثله النقطة (٠ ، – ١)
* الأشكال المختلفة للصورة المثلثية للعدد المركب ع = س + ت ص :
* ع = ل (حا θ + ت حتا θ) = ل (حتا [$\frac{١}{٢}$ ط – θ] + ت حا [$\frac{١}{٢}$ ط – θ])
* ع = ل(– حتا θ + ت حا θ) = ل(حتا [ط – θ] + ت حا [ط – θ])
* ع = ل(– حا θ + ت حتا θ) = ل(حتا [$\frac{١}{٢}$ ط + θ] + ت حا [$\frac{١}{٢}$ ط + θ])
* ع = ل (–حتا θ – ت حا θ) = ل (حتا [ط + θ] + ت حا [ط + θ])
* ع = ل(– حا θ – ت حتا θ) = ل(حتا [$\frac{٣}{٢}$ ط – θ] + ت حا [$\frac{٣}{٢}$ ط – θ])
* ع = ل (حتا θ – ت حا θ) = ل (حتا [– θ] + ت حا [– θ])
* ع = ل (حا θ – ت حتا θ) = ل(حتا [$\frac{٣}{٢}$ ط + θ] + ت حا [$\frac{٣}{٢}$ ط + θ])
* ملاحظات :
* – ع = ل(– حا θ + ت حتا θ) = ل(حتا [$\frac{١}{٢}$ ط + θ] + ت حا [$\frac{١}{٢}$ ط + θ])
* $\overline{ع}$ = ل (حتا θ – ت حا θ) = ل (حتا [– θ] + ت حا [– θ])
* ع$^{–١}$ = $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{ل}$ (حتا θ – ت حا θ) = $\frac{١}{ل}$ (حتا [– θ] + ت حا [– θ])
* $\frac{١}{\overline{ع}}$ = $\frac{١}{ل}$ (حتا θ + ت حا θ)
* الصور المثلثية لحاصل ضرب عددين مركبين و لخارج قسمتهما

إذا كان : ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ عددان مركبان و كان :

ع$_{١}$ = ل$_{١}$ (حتا θ$_{١}$ + ت حا θ$_{١}$) ، ع$_{٢}$ = ل$_{٢}$ (حتا θ$_{٢}$ + ت حا θ$_{٢}$) فإن :

* ع$_{١}$. ع$_{٢}$ = ل$_{١}$. ل$_{٢}$ (حتا [θ$_{١}$ + θ$_{٢}$] + ت حا [θ$_{١}$ + θ$_{٢}$])
* ملاحظات :
* ع^{٢} = ل^{٢} (حتا ٢ θ + ت حا ٢ θ)
* ع^{ن} = ل^{ن} (حتا ن θ + ت حا ن θ) حيث : ن عدد صحيح موجب
* $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ (حتا [θ$_{١}$ – θ$_{٢}$] + ت حا [θ$_{١}$ – θ$_{٢}$])
* نظرية ديموافر :

إذا كان : ن عدداً نسبياً فإن : (حتا θ + ت حا θ)^{ن} = (حتان θ + ت حا ن θ)

* إذا كان : ن = $\frac{١}{ك}$ حيث ك ∈ ص$_{+}$ فإن :

(حا θ + ت حتا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = حتا $\frac{θ + ٢ ر ط}{ك}$ + ت حا $\frac{θ + ٢ ر ط}{ك}$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، (ك – ١)

* الجذرين التربيعيين لعدد مركب

* بإستخدام الصورة المثلثية : إذا كان : ع = س + ت ص فإن :

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ل}^{\frac{1}{2}} (\text{حا}\ \theta + \text{ت حتا}\ \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\text{ل}}\ (\text{حتا}\ \frac{\theta + 2\text{ر ط}}{2} + \text{ت حا}\ \frac{\theta + 2\text{ر ط}}{2})$$

حيث : ر = ٠ ، ١

أى الجذرين التربيعيين للعدد ع هما : $\sqrt{\text{ل}}\ (\text{حتا}\ \frac{1}{2}\theta + \text{ت حا}\ \frac{1}{2}\theta)$

، $\sqrt{\text{ل}}\ (\text{حتا}\ [\text{ط} + \frac{1}{2}\theta] + \text{ت حا}\ [\text{ط} + \frac{1}{2}\theta])$

* بإستخدام الصورة الأسية :

$$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ل}^{\frac{1}{2}}\ \text{هـ}^{\frac{\theta + 2\text{ر ط}}{2} \times \text{ت}}$$

حيث : ر = ٠ ، ١

* بإستخدام الصورة الجبرية : إذا كان : ع = س + ت ص فإننا نفرض أن :

$\text{ع}^{\frac{1}{2}} = (\text{س} + \text{ت ص})^{\frac{1}{2}} = \text{أ} + \text{ب ت}$ بالتربيع ينتج :

$\text{س} + \text{ت ص} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + 2\text{أ ب ت}$ من خواص الأعداد المركبة نستنتج :

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \text{س}$ (١) لاحظ : $\text{أ}^2 - \text{ب}^2 > 0$ " لأنه مقياس العدد المركب "

، ٢ أ ب = ص (٢) و بحل (١) ، (٢) ينتج :

أ ، ب و بالتالى نحصل على الجذرين التربيعيين للعدد ع

* ملاحظة :

فى المعادلة (٢) إذا كان : ٢ أ ب موجب فإن : أ ، ب متشابهين فى الإشارة

أما إذا كان : ٢ أ ب سالب فإن : أ ، ب مختلفين فى الإشارة

* العمليات على الأعداد المركبة فى الصورة الأسية :

* $\text{ل}_1\ \text{هـ}^{\text{ت}\theta_1} \times \text{ل}_2\ \text{هـ}^{\text{ت}\theta_2} = \text{ل}_1\ \text{ل}_2\ \text{هـ}^{\text{ت}(\theta_1 + \theta_2)}$

* $\frac{\text{ل}_1\ \text{هـ}^{\text{ت}\theta_1}}{\text{ل}_2\ \text{هـ}^{\text{ت}\theta_2}} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}\ \text{هـ}^{\text{ت}(\theta_1 - \theta_2)}$ * $(\text{ل هـ}^{\text{ت}\theta})^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}\ \text{هـ}^{\text{ت ن}\theta}$

* $\sqrt[\text{ن}]{\text{ل هـ}^{\text{ت}\theta}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}}\ \text{هـ}^{\frac{\theta + 2\text{ر ط}}{\text{ن}} \times \text{ت}}$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، (ن − ١)

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

* الصور المثلثية : (حتا ٠ + ت حا ٠) ، (حتا $\frac{2}{3}$ ط + ت حا $\frac{2}{3}$ ط) ،

(حتا $\frac{4}{3}$ ط + ت حا $\frac{4}{3}$ ط)

* الصور الجبرية : ١ ، ($-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت) ، ($-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت)

* الصور الرمزية : ١ ، ω ، ω^2

* نتائج و ملاحظات :

* مربع أى جذر من الجذرين التخيليين يساوى الجذر التخيلى الآخر
* النقط التى تمثلها تقع فى شكل أرجاند على دائرة الوحدة و تقسمها إلى ثلاث أقواس متساوية الطول
* $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر * $\omega \times \omega^2 = \omega^3 = 1$

* القوى الصحيحة للعدد ω :

* القوى الصحيحة للعدد ω تعطى إحدى القيم : ١ ، ω ، ω^2

* قيم العدد ω تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٣

* لإيجاد $\omega^{\text{ن}}$ حيث ن ∈ ص نقسم ن على ٤ فيكون :

$\omega^{\text{ن}}$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

باقى القسمة	٠	١	٢	ملاحظة	
القيمة	١	ω	ω^2	$\omega^{-1} = \omega^2$	$\omega^{-2} = \omega$

المحددات

* تنشأ المحددات كنتيجة لحذف عدة متغيرات من مجموعة معادلات خطية

* تعريف : المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف (ص) ، ن من الأعمدة (ع)
و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية
حيث العنصر : $\text{أ}_{\text{ص ع}} \in \text{ح}$ ؛ ص ، ع = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن

* ملاحظات :
* المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة
و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية
* العوامل المرافقة لعناصر المحددات :
فى محدد الدرجة الثالثة م_3 إذا أخذنا العنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ الذى يقع فى الصف ص و العمود ع و حذفنا الصف ص و العمود ع فإنه ينشأ المحدد م_2 ، و إذا ضربنا المحدد الناتج فى $(-1)^{\text{ص}+\text{ع}}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$
* العناصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ من الممكن أن تكون أعداداً حقيقية أو أعداداً مركبة أو دوال حقيقية

* إشارات العوامل المرافقة لعناصر محدد الدرجة الثالثة
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

* تعيين قيمة المحدد :
* إذا كانت : ن = ١ فإن : $\text{م}_1 = |\text{أ}_{11}| = \text{أ}_{11}$

* إذا كانت : ن = ٢ فإن : $\text{م}_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} = \text{أ}_{11}\text{أ}_{22} - \text{أ}_{21}\text{أ}_{12}$

* إذا كانت : ن = ٣ فإن : $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$

$$\text{م}_3 = \text{أ}_{11}(\text{أ}_{22}\text{أ}_{33} - \text{أ}_{32}\text{أ}_{23}) - \text{أ}_{21}(\text{أ}_{12}\text{أ}_{33} - \text{أ}_{32}\text{أ}_{13}) + \text{أ}_{31}(\text{أ}_{12}\text{أ}_{23} - \text{أ}_{22}\text{أ}_{13})$$

* خواص المحددات :
(١) فلا أى محدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير
(٢) قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه (أعمدته)
(٣) فى أى محدد إذا بدلنا موصفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الأصلى مضروباً فى (– ١)
(٤) إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٥) إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
ملاحظات :
* ضرب محدد فى عدد يتطلب ضرب عناصر صف (عمود) فقط فى هذا العدد
* إذا كانت عناصر أى صف (عمود) هى مضاعفات عناصر صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٦) إذا كانت جميع عناصر صف (عمود) فى محدد تساوى صفراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٧) فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع قيمتى محددين
ملاحظة : " لجمع محددين لا يختلفان سوى فى عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) نجمع العناصر المتناظرة فى هذين الصفين (العمودين) و يعاد كتابة باقى العناصر كما هى "
(٨) إذا أضفنا على عناصر أى صف (عمود) فى محدد فى مضاعفات أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير
(٩) فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة تساوى صفراً
(١٠) قيمة أى محدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

* الصورة المثلثية للمحدد :

المحدد م = $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & ٠ & ٠ \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ هو محدد على الصورة المثلثية

، تسمى العناصر : $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢٢}$ ، $\text{أ}_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى ، م = $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$

* حل المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل بطريقة كرامر :

إذا كانت المعادلات الخطية الثلاث التالية فى س ، ص ، ع و هى :

$\text{أ}_{١١}\,\text{س} + \text{أ}_{٢١}\,\text{ص} + \text{أ}_{٣١}\,\text{ع} = \text{حـ}_{١}$ ،

$\text{أ}_{١٢}\,\text{س} + \text{أ}_{٢٢}\,\text{ص} + \text{أ}_{٣٢}\,\text{ع} = \text{حـ}_{٢}$ ،

$\text{أ}_{١٣}\,\text{س} + \text{أ}_{٢٣}\,\text{ص} + \text{أ}_{٣٣}\,\text{ع} = \text{حـ}_{٣}$ فإن :

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، $\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

حيث : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

* ملاحظات :

* مجموعة المعادلات لها حل وحيد إذا كانت : $\Delta \neq ٠$
* مجموعة قد يكون ليس لها أو قد يكون لها عدد لا نهائى من الحلول
و هاتين الحالتين خارج نطاق المقرر

التفاضل و التكامل

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

** قواعد إيجاد نهاية دالة عند نقطة

* لإيجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فنحصل :

(١) ل ∈ ح فيكون هو نهاية د (س)

(٢) $\frac{\text{ن}}{٠}$ حيث ن ∈ ح − { ٠ } فتكون نهاية د (س) ليس لها وجود

(٣) $\frac{٠}{٠}$ فتكون نهاية د (س) موجودة تحدد بإحدى الطرق التالية :

* التحليل ، القسمة المطولة على العامل الصفرى ، الضرب فى المرافق
إذا أحتوت الدالة على جذور تربيعية لحذف العامل الصفرى

* إذا كانت د (س) = $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = $\text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن} - ١}$

* إذا كانت د (س) = $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = $\frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن} - \text{م}}$

** قواعد إيجاد نهاية الدوال المثلثية

* $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = ١$ حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى

* $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = ١$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أ س}}{\text{ب س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

** نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = ل إذا و فقط إذا كان : د (أ^{+}) = د (أ^{-}) = ل

* ملاحظات :

* إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار أ مباشرة يلزم فى هذه الحالة بحث كل من د (أ^{+}) = د (أ^{-}) ثم المقارنة بينهما " إن وجدتا "
* أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية مباشرة
* إذا كانت الدالة معرفة على [أ ، ب] أو] أ ، ب [فللبحث عن :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) يكتفى بالنهاية اليمنى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ب}}$ د (س) يكتفى بالنهاية اليسرى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

الإتصال

** إتصال دالة عند نقطة

* تكون الدالة د (س) عند س = ﺃ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

(١) د (س) معرفة عند س = ﺃ أى أن : د (ﺃ) موجودة

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ﺃ}}$ د (س) لها وجود (٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ﺃ}}$ د (س) = د (ﺃ)

* ملاحظات :

إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة فإن :
د (س) تكون غير متصلة عند س = ﺃ

* إذا كانت د (س) معرفة عند س = ﺃ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ﺃ}}$ د (س) لها وجود
و كانت الدالة غير متصلة عند س = ﺃ لأن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ﺃ}}$ د (س) ≠ د (ﺃ)
فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = ﺃ بإعادة تعريفها عند س = ﺃ بجعل
$\lim\limits_{\text{س} \to \text{ﺃ}}$ د (س) = د (ﺃ)

** إتصال دالة على فترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف =] ﺃ ، ب [فإن الدالة تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف = [ﺃ ، ب] فإن الدالة تكون متصلة إذا تحققت الشروط التالية : (١) الدالة متصلة على] ﺃ ، ب [
(٢) الدالة متصلة من اليمين عند ﺃ (٣) الدالة متصلة من اليسار عند ب

* ملاحظات

* إذا كانت الدالة غير متصلة عند حـ ∈] ﺃ ، ب [فإنها تكون غير متصلة على [ﺃ ، ب]
* دوال كثيرات الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
* الدوال الكسرية الجبرية متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند أصفار دالة المقام
* دالة الجيب و دالة جيب التمام متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
* دالة الظل متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند النقط
س = ± $\frac{١}{٢}$ ط ، ± $\frac{٣}{٢}$ ط ، ± $\frac{٥}{٢}$ ط ، ....

الإشتقاق

** قواعد الإشتقاق (تطبق فقط على الدوال القابلة للإشتقاق)

* إذا كانت الدالة ص = د (س) = ك " ثابت "
فإن : د′ (س) " $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ " = صفر

* إذا كانت : د (س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ " ن ∈ ح " فإن : د′ (س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

* الحالات المختلفة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}}$ فإن : د′ (س) = $\frac{-\text{ن}}{\text{س}^{\text{ن}+١}}$

(٢) إذا كانت : د (س) = $\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}}}$ فإن :

(ﺃ) إذا كان : ك < م فإن : د′ (س) = $\frac{\text{ك}}{\text{م}\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{م}-\text{ك}}}}$

(ب) إذا كان : ك > م فإن : د′ (س) = $\frac{\text{ك}\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}-\text{م}}}}{\text{م}}$

حالة خاصة :

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}}$ فإن : د′ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

* إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (د · ر) = : د · ر′ + ر · د′

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) = $\frac{\text{ر} \cdot \text{د}' - \text{د} \cdot \text{ر}'}{\text{ر}^{٢}}$ حيث ر (س) ≠ ٠

* إذا كانت : د (س) = حا س فإن : $\text{د}'$ (س) = حتا س
* إذا كانت : د (س) = حتا س فإن : $\text{د}'$ (س) = – حا س
* إذا كانت : د (س) = طا س فإن : $\text{د}'$ (س) = $\text{قا}^{٢}$ س
* إذا كانت : د (س) = حا (أ س + ب) فإن : $\text{د}'$ (س) = حتا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = حتا (أ س + ب) فإن : $\text{د}'$ (س) = – حا (أ س + ب)
* إذا كانت : د (س) = طا (أ س + ب) فإن : $\text{د}'$ (س) = $\text{قا}^{٢}$ (أ س + ب)

حيث : أ ، ب ثابتان

** قابلية الإشتقاق

الدالة د (س) تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ إذا كان : $\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \text{د}'(\text{أ}^{-})$

أما إذا كان : $\text{د}'(\text{أ}^{+}) \neq \text{د}'(\text{أ}^{-})$ فإنها غير قابلة للإشتقاق عند س = أ حيث :

* $\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$
* $\text{د}'(\text{أ}^{-}) = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

* ملاحظات :
* لبحث قابلية الإشتقاق يجب إيجاد $\text{د}'(\text{أ}^{+})$ ، $\text{د}'(\text{أ}^{-})$ و المقارنة بينهما
أما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق فتشتق الدالة بإستخدام قواعد الإشتقاق مباشرة
* إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند س = أ و العكس غير صحيح
* إذا كانت الدالة د (س) غير متصلة عند س = أ فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عند س = أ
* إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فلبحث قابلية الإشتقاق فى هذه الفترة :
(١) نبحث قابلية الإشتقاق على] أ ، ب [
(٢) يكتفى ببحث المشتقة اليمنى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت
(٣) يكتفى ببحث المشتقة اليسرى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت

** المشتقات العليا للدالة

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* المشتقة الأولى لها دالة فى س و هى : $\text{ص}'$ أو $\text{د}'$ (س)
أو $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ " معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س "
* المشتقة الثانية لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$ أو $\text{ص}''$
أو $\text{د}''$ (س) أو $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$
* المشتقة الثالثة لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}\right)$ أو $\text{ص}'''$
أو $\text{د}'''$ (س) أو $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}}$ و هكذا ....

** الإشتقاق الضمنى

* الدالة الضمنية هى دالة على الصورة : د (س ، ص) = ٠
و الإشتقاق فى هذه الحالة يسمى إشتقاق ضمنى
* إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى ع
، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :
* $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$

* ملاحظات :
* إذا كانت : ص = $[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ن}\,[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}-١} \times \text{د}'(\text{س})$
* إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :
$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{ص})^{\text{ن}} = \text{ن}\,(\text{ص})^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$
* إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :
* $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ع}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء ع}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}\right) \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ع}}$

تطبيقات هندسية على المشتقة الأولى

* طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : أ ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) ، ب ($\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$) هو : $\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + حـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ

هو : م = طا هـ

و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة الإتجاه الموجب لمحور مع السينات

، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ملاحظة :

إذا كان : $\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢$ ميلا المستقيمان $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ فإن :

$\text{ل}_١ \parallel \text{ل}_٢$ إذا كان : $\text{م}_١ = \text{م}_٢$ ، $\text{ل}_١ \perp \text{ل}_٢$ إذا كان : $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

* قواعد عامة

(١) أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته

(٢) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً

(٣) ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٤) العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٥) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٦) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين ، إذا كان قياس الزاوية بين المماسيين لمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين قائمة كان المنحنيان متقاطعيين على التعامد

* إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس لمنحنى و العمودى عليه

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$)

الواقعة عليه = $[\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$)

الواقعة عليه = $\frac{١}{[\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}}$

(٣) المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) الواقعة عليه يصنع زاوية قياسها هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

طا هـ = $[\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

و يكون : $[\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$
- = صفر إذا كان المماس يوازى محور السينات
- > ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
- < ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
- غير معرف ($\frac{١}{٠}$) إذا كان المماس يوازى محور الصادات

* معادلتا المماس لمنحنى و العمودى عليه :

(١) معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) هى :

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م} (\text{س} - \text{س}_١)$ حيث : $\text{م} = [\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

(٢) معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) هى :

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{١}{\text{م}} (\text{س} - \text{س}_١)$ حيث : $\text{م} = [\text{ص}']_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

* إذا كانت : ص = د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س
* إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات مثل : س ، ص ، ع ، ٠٠٠٠
باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات :

$\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ ؛ $\frac{ءع}{ءن}$

* إذا كان : ص = د (س) ، س = ر (ن) فإن :

$$\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \cdot \frac{ءس}{ءن}$$

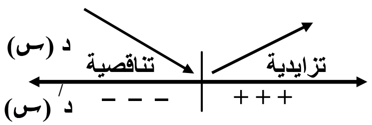
* خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

- تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن
- إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب
- اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن
- التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

* ملاحظات :
* إذا كان معدل التغير يزداد تكون إشارته موجبة { مثلاً : يتمدد ، يبتعد ، يصب ماء }
* إذا كان معدل التغير يتناقص تكون إشارته سالبة { مثلاً : يتسرب ، يقترب ، ينزلق }
* العلاقة الرياضية يمكن أن تكون { محيط ، مساحة ، حجم ، نظرية فيثاغورث ، تشابه مثلثات ، أو علاقة معطاة في السؤال . . . }
* التعويض بالمعطى يكون بعد اشتقاق العلاقة

سلوك الدالة و رسم منحناها

* تزايد و تناقص الدوال :
* الدالة المتزايدة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على [أ ، ب] إذا كان : د ($س_1$) < د ($س_2$)
لكل $س_1$ < $س_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المتناقصة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على [أ ، ب] إذا كان : د ($س_1$) > د ($س_2$)
لكل $س_1$ < $س_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المطردة التزايد :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على [أ ، ب] إذا كان : د ($س_1$) ≤ د ($س_2$)
لكل $س_1$ < $س_2$ فى هذه الفترة
* الدالة المطردة التناقص :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على [أ ، ب] إذا كان : د ($س_1$) ≥ د ($س_2$)
لكل $س_1$ < $س_2$ فى هذه الفترة
* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد الدالة :
١ ـ إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى [أ ، ب] و كانت متزايدة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≥ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ ـ إذا كانت د/ (س) > ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة
٣ ـ إذا كانت د/ (س) ≥ ٠ فى] أ ، ب [
فإن : د (س) تكون د متزايدة فى هذه الفترة



* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تناقص الدالة :
١ ـ إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق
فى [أ ، ب] و كانت متناقصة فى هذه الفترة
فإن : د (س) ≤ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ ـ إذا كانت د/ (س) < ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة
٣ ـ إذا كانت د/ (س) ≤ ٠ فى] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة فى هذه الفترة

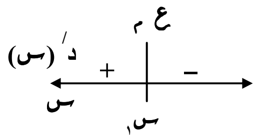
* ملاحظات :

* تبقى تعريفات التزايد و التناقص كما هى إذا أستبدلت [٩ ، ب] بأى من :] ٩ ، ب [أو] ٩ ، ب] أو [٩ ، ب [
* لإيجاد فترات التزايد نحل المتباينة : د/ (س) > ٠
، لإيجاد فترات التناقص نحل المتباينة : د/ (س) < ٠

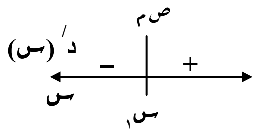
* النقط الحرجة للدالة :
يقال أن س١ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين :
(١) د/ (س١) لها وجود و تساوى الصفر (٢) د/ (س١) غير موجودة

* القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة :
* نظرية (١) :
إذا كانت : الدالة د (س) معرفة على [٩ ، ب] و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س١ ∈] ٩ ، ب [فإن د/ (س١) = ٠

* نظرية (٢) :
إذا كانت : الدالة د (س) متصلة و كان :
[١] د/ (س) ≥ ٠ لقيم س على يسار س١ مباشر
، د/ (س) ≤ ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة
فإن : س١ نقطة عندها قيمة عظمى محلية



[٢] د/ (س) ≤ ٠ لقيم س على يسار س١ مباشرة
، د/ (س) ≥ ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة
فإن : س١ نقطة عندها قيمة صغرى محلية



* نظرية (٣) :
إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق و كان :
[١] د/ (س) = ٠ ، د// (س١) > ٠ فإن : (س١ ، د (س١)) نقطة صغرى محلية
[٢] د/ (س) = ٠ ، د// (س١) < ٠ فإن : (س١ ، د (س١)) نقطة عظمى محلية

* ملاحظات :
* إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س١ و كانت : د/ (س١) = ٠
فليس من الضرورى أن تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية
* قد تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية و مع ذلك
د/ (س١) غير موجودة
* إذا كانت : د// (س١) = ٠ نستخدم المشتقة الأولى للتحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى

* القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة :
إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [٩ ، ب] فإن :
* القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* خطوات التعيين :
* نوجد المشتقة الأولى
* نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
* نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
* نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً من الخطوتين السابقتين و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
* نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه
* ملاحظات :
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جزء صغير من فترة تعريف الدالة
بينما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) لها فى جزء كل فترة تعريف الدالة
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية و لكنها أكبر (أو أصغر) هذه القيم جميعاً
* كل قيمة عظمى أو صغرى مطلقة تكون قيمة عظمى أو صغرى محلية ولكن العكس غير صحيح

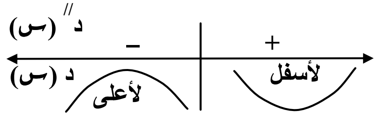
* القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة ، لكن يمكن أن يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى أو صغرى محلية

* دائماً القيمة العظمى المطلقة ≥ القيمة الصغرى المطلقة
لكن ليس من الضروري أن تكون : القيمة العظمة المحلية > القيمة الصغرى المحلية

* تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة
هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما

* خطوات الحل :
(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " و ذلك بالإستعانة بمعطيات المسألة
(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة فيها
(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة
(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة وعند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

* التحدب :
* التحدب إلى أعلى :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* التحدب إلى أسفل :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* نظرية :
١– إذا كانت د″ (س) < ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى في هذه الفترة
٢– إذا كانت د″ (س) > ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل في هذه الفترة



* خطوات بحث تحدب منحنى الدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :
(١) نوجد د″ (س)
(٢) نوجد مجموعة حل د″ (س) ≤ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أعلى
، نوجد مجموعة حل د″ (س) ≥ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أسفل

* نقط الإنقلاب :
هي النقط التي تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب لأعلى من منحنى
* خطوات تعيين نقط الإنقلاب للدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :
- نوجد د′ (س) ، د″ (س) ثم نحل المعادلة د″ (س) = ٠
- نبحث إشارة د″ (س) قبل و بعد " مباشرة " كل نقطة من النقط السابقة بحيث تنتمى هذه النقط لمجال الدالة فيكون :
(١) د″ (س) تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فتكون هذه النقطة نقطة إنقلاب
(٢) د″ (س) لا تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فلا تكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

* رسم المنحنيات :
لرسم منحنى الدالة د (س) " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :
١ – نوجد د′ (س) ، د″ (س)
٢ – نستخدم د′ (س) فى تعيين :
أ – مناطق التزايد حيث د′ (س) > ٠ ، مناطق التناقص حيث د′ (س) < ٠
ب – نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث د′ (س) = ٠
٣ – نستخدم د″ (س) فى تعيين :
أ – مناطق التحدب إلى أعلى حيث د″ (س) < ٠
، مناطق التحدب إلى أسفل حيث د″ (س) > ٠
ب – نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث د″ (س) = ٠
٤ – نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :
أ – نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة د (س) = ٠ " إن أمكن "
و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠ أى (٠ ، د (٠))
ب – بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة و إيجاد د (س)
٥ – ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

التكامل

* تعريف :
* إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : $\text{ت}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$ فإن : ت (س) تسمى دالة المشتقة العكسية للدالة د أو دالة أصلية مقابلة للدالة د
* $\text{ت}(\text{س}) = \int \text{د}(\text{س})\,\text{ء س}$ إذا و فقط إذا كان : $\text{ت}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$
* نظريات :
* $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$ حيث : $\text{ن} \neq -١$ ، ث ثابت
* $\int (\text{أ س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{(\text{أ س}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{ث}$

حيث : $\text{ن} \neq -١$ ، أ ، ب ، ث ثوابت

* خصائص التكامل :
* $\int \text{أ س}^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{\text{أ س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$ حيث : $\text{ن} \neq -١$ ، أ ، ث ثوابت
* $\int [\,\text{د}_١(\text{س}) \pm \text{د}_٢(\text{س})\,]\,\text{ء س} = \int \text{د}_١(\text{س})\,\text{ء س} \pm \int \text{د}_٢(\text{س})\,\text{ء س}$
* ملاحظات و نتائج :
* $\int \text{ء س} = \text{س} + \text{ث}$ * $\int \text{أ}\,\text{ء س} = \text{أ س} + \text{ث}$
* برهان النظريات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر
* يكفى إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية
* يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل

* فصل المتغيرات :
* إذا كان : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{ص})}$ فإن : $\int \text{ر}(\text{ص})\,\text{ء ص} = \int \text{د}(\text{س})\,\text{ء س}$
* إذا كان : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ك}(\text{س})$ فإن : $\text{ص} = \int \text{ك}(\text{س})\,\text{ء س}$

* تكاملات بعض الدوال المثلثية :
* $\int \text{حا س}\,\text{ء س} = -\,\text{حتا س} + \text{ث}$
* $\int \text{حتا س}\,\text{ء س} = \text{حا س} + \text{ث}$
* $\int \text{قا}^٢\,\text{س}\,\text{ء س} = \text{طا س} + \text{ث}$
* $\int \text{حا}(\text{أ س}+\text{ب})\,\text{ء س} = -\frac{١}{\text{أ}}\,\text{حتا}(\text{أ س}+\text{ب}) + \text{ث}$
* $\int \text{حتا}(\text{أ س}+\text{ب})\,\text{ء س} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{حا}(\text{أ س}+\text{ب}) + \text{ث}$
* $\int \text{قا}^٢(\text{أ س}+\text{ب})\,\text{ء س} = -\frac{١}{\text{أ}}\,\text{طا}(\text{أ س}+\text{ب}) + \text{ث}$

* التطبيق الهندسى للتكامل :

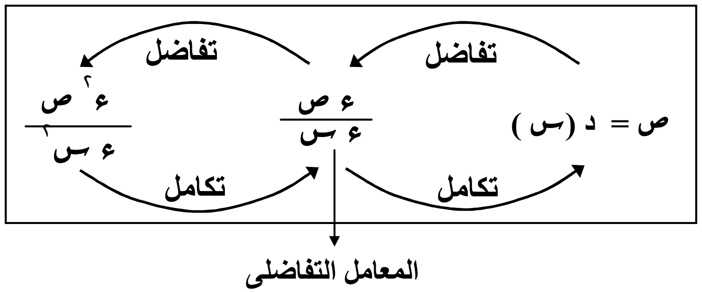
إذا كان : ص = د (س) هى معادلة منحنى فإن : ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) تقع عليه = $\text{ص}' = \text{د}'(\text{س})$ و بالتالى تكون معادلته هى :

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{ء س}$$

* ملاحظة :

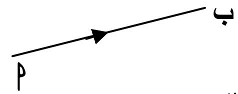
من هذا التكامل نحصل على معادلة عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أى نقطة معينة للإحداثى السينى س و تحديد أحد هذه المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافى كأن يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءاً معيناً من أحد المحورين أو ٠٠٠٠ الخ

* العلاقة بين عملية التفاضل و عملية التكامل :



الإستاتيكا

القطعة المستقيمة الموجهة (المتجه) $\overrightarrow{\text{أ ب}}$



* $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\| = \text{أ ب}$

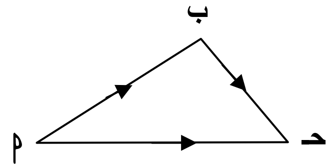
* $\overrightarrow{\text{أ ب}} \not\equiv \overrightarrow{\text{ب أ}}$ بينما $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ب أ}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| = \text{أ ب}$

* $\overrightarrow{\text{أ ب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}}$ " يقرأ الرمز ≡ يكافئ ، ≢ لا يكافئ "

المتجهات المتكافئة

هى متجهات لها نفس الطول و نفس الإتجاه

جمع المتجهات هندسياً



** قاعدة المثلث

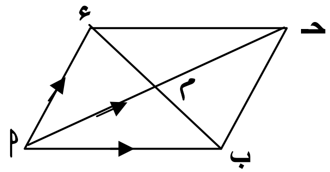
$$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \overrightarrow{\text{أ حـ}}$$

* ملاحظات :

* $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ أ}} = \overrightarrow{0}$

* تطبق هذه القاعدة على أى مضلع مغلق

** قاعدة متوازى الأضلاع



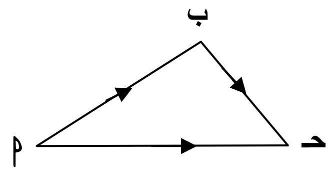
$$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{أ حـ}}$$

* ملاحظة :

فى $\triangle$ أ ب ء : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ء}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أ م}}$

حيث: $\overrightarrow{\text{أ م}}$ متوسط فى $\triangle$ أ ب ء

طرح المتجهات هندسياً



$$\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ ب}}$$

متجه الموضع

متجه الموضع لنقطة أ (س ، ص) هو: $\overrightarrow{\text{و أ}} = (\overrightarrow{\text{أ}}) = \text{س}\,\hat{\text{س}} + \text{ص}\,\hat{\text{ص}}$

حيث : $\hat{\text{س}} = (١ ، ٠)$ ، $\hat{\text{ص}} = (٠ ، ١)$

متجها وحدة فى الإتجاه الموجب لكل من محورى الإحداثيات السينى و الصادى على الترتيب

* ملاحظة :

كل متجه موضع يمكن تمثيله بأى عدد من المتجهات المكافئة له (لها نفس الطول و نفس الإتجاه)

معيار المتجه

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س ، ص})$ فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

المتجه الواصل بين أى نقطتين

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن :

، $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_2 - \text{س}_1 ، \text{ص}_2 - \text{ص}_1)$

ضرب متجه فى عدد حقيقى ك $\in$ ح $- \{٠\}$

، إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$

* ملاحظات

* $\dfrac{\text{س}_1}{\text{ص}_1} = \dfrac{\text{س}_2}{\text{ص}_2} = \text{ك}$

* إذا كان : $\text{ك} > ٠$ " موجب " فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى إتجاه واحد

* إذا كان : $\text{ك} < ٠$ " سالب " فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى إتجاهين متضادين

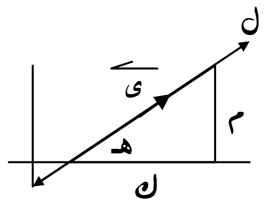
المتجه الصفرى

$\overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{0} = (٠ ، ٠)$ ، $\|\overrightarrow{\text{و}}\| = ٠$

* ملاحظات

* $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{0}$

العلاقة بين المتجه و المستقيم الحامل له أو الموازى له



إذا كان المستقيم ل : أ س + ب ص + حـ = ٠

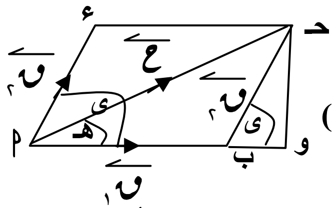
حامل المتجه $\overrightarrow{\text{ى}} = (\text{ل ، م})$

فمن الشكل المقابل : $\therefore$ ميل $\overrightarrow{\text{ى}}$ = طا هـ " ميل المتجه "

، $\because$ طا هـ = ميل المستقيم ل $\therefore \dfrac{\text{م}}{\text{ل}} = \dfrac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

محصلة قوتين

** بيانياً



فى الشكل المقابل : إذا كان $\overrightarrow{أب}$ و $\overrightarrow{أو}$ يمثلان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تمثيلاً تاماً (مقداراً و إتجاهاً و خط عمل)

فإن : $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (ح ، هـ)$

بتطبيق قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين حيث أ ب حـ ء متوازى أضلاع

حيث : هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overrightarrow{ح}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

** تحليلياً

$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2$ جتا ى ، طا هـ $= \frac{ق_2 \text{ حا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}}$

البرهان ينتج من : تطبيق قانون جيب التمام فى Δ أ ب ء أو نظرية فيثاغورث فى Δ أ و حـ

* ملاحظة :

* إذا كانت هـ = ٩٠° فإن : $ق_1 + ق_2$ جتا ى = ٠ ، $ح^2 = ق_2^2 - ق_1^2$

* إذا أضيفت قوة ثالثة مقدارها $ق_3$ فإن :

أكبر محصلة = $ح + ق_3$ ، أصغر محصلة = $|ح - ق_3|$

* حالات خاصة :

* القوتان لهما نفس خط العمل :

$ح = ق_1 + ق_2$ ، ى = ٠° ، خط عمل $\overrightarrow{ح}$ فى إتجاه خطى عمل القوتين

، تكون ح أكبر قيمة للمحصلة (عظمى)

* القوتان فى إتجاهين متضادين :

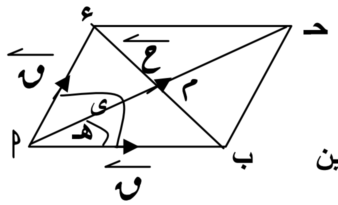
$ح = |ق_1 - ق_2|$ ، ى = ١٨٠° ، خط عمل $\overrightarrow{ح}$ فى إتجاه خط عمل القوة الأكبر مقداراً

، تكون ح أصغر قيمة للمحصلة (صغرى)

* ملاحظة : $ق_1 - ق_2 \leqslant ح \leqslant ق_1 + ق_2$

أو $ح \in [ق_1 - ق_2 ، ق_1 + ق_2]$

* القوتان متساويتان فى المقدار : $ق_1 = ق_2 = ق$



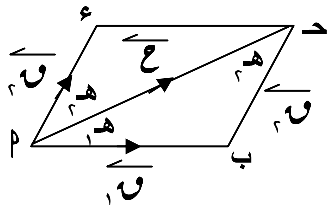
$ح = 2 ق$ جتا $\frac{1}{2}$ ى ، هـ $= \frac{1}{2}$ ى

البرهان ينتج مباشرة من الشكل المقابل حيث أ ب حـ ء معين

فيكون Δ أ ب م قائم الزاوية

∴ $\frac{1}{2}$ ح = ق جتا هـ ∴ ح = ٢ ق جتا $\frac{1}{2}$ ى

تحليل قوة إلى مركبتين



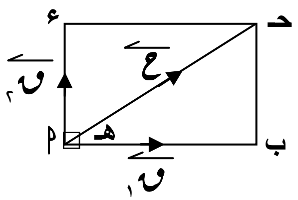
من الشكل المقابل :

بتطبيق قانون الجيب فى Δ أ ب حـ ينتج

$$ق_1 = \frac{ح \text{ حا } هـ_2}{\text{حا}(هـ_1 + هـ_2)}$$

$$، ق_2 = \frac{ح \text{ حا } هـ_1}{\text{حا}(هـ_1 + هـ_2)}$$

* حالة خاصة



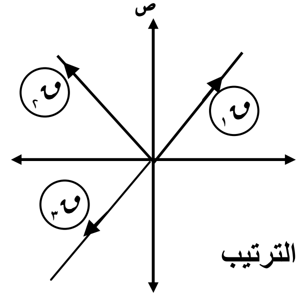
تحليل قوة فى إتجاهين متعامدين

$ق_1 = ح$ جتا هـ

، $ق_2 = ح$ حا هـ

محصلة و إتزان عدة قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

محصلة عدة قوى مستوية و متلاقية فى نقطة



إذا كانت القوى المعطاه هى : $\overleftarrow{ق_١}$ = (ق١ ، هـ١) ،

$\overleftarrow{ق_٢}$ = (ق١ ، هـ١) ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = (ق١ ، هـ١) ، . . .

تحلل كل قوة من هذه القوى إلى مركبتين فى الإتجاهين الموجبين لمحورى الإحداثيات و تكونان هما : س ، ص على الترتيب

فتكون : $\overleftarrow{ح}$ = س $\overleftarrow{س}$ + ص $\overleftarrow{ص}$ = (ح ، هـ)

أى : ح^٢ = س^٢ + ص^٢ ، طا هـ = $\frac{ص}{س}$

لاحظ : الفرق بين س ، $\overleftarrow{س}$

فالأول هو المجموع الجبرى لمركبات القوى فى الإتجاه الموجب لمحور السينات
و الثانى متجه وحدة فى الإتجاه الموجب لمحور السينات

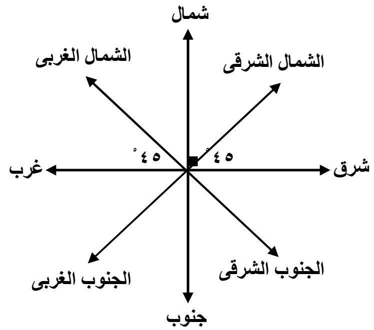
كذلك كل من : ص ، $\overleftarrow{ص}$

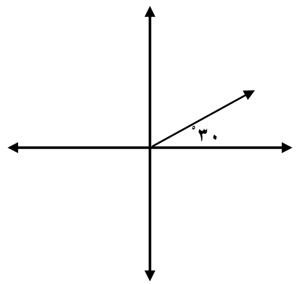
جدول تحديد موقع خط عمل محصلة مجموعة من القوى :

س	+	−	−	+	+	−	٠	٠
ص	+	+	−	−	٠	٠	+	−
ح	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	على الإتجاه الموجب لمحور السينات	على الإتجاه السالب لمحور السينات	على الإتجاه الموجب لمحور الصادات	على الإتجاه السالب لمحور الصادات

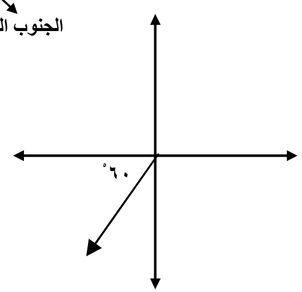
* تمثيل الإتجاهات الرئيسية و الفرعية

كما بالأشكال المقابلة





٣٠° شمال الشرق



٦٠° جنوب الغرب

توازن عدة قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

نحلل كل قوة من القوى المعطاه إلى مركبتين فى الإتجاهين الموجبين لمحورى الإحداثيات و تكونان هما : س ، ص على الترتيب

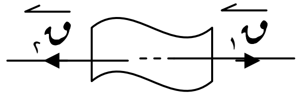
ثم نضع :

س = ٠ ، ص = ٠

ثم نوجد المطلوب

توازن القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

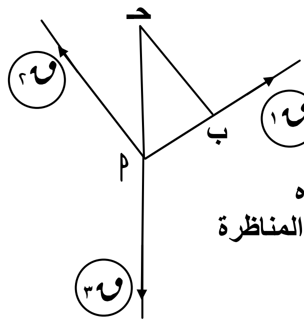
توازن قوتين



الشروط :

(١) القوتان متساويتان فى المقدار
(٢) القوتان متضادتان فى الإتجاه
(٣) القوتان لهما نفس خط العمل (خطا عملهما منطبقان)

توازن ثلاث قوى



** قاعدة مثلث القوى
إذا إتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث و فى إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاعه تتناسب مع مقادير القوى المناظرة

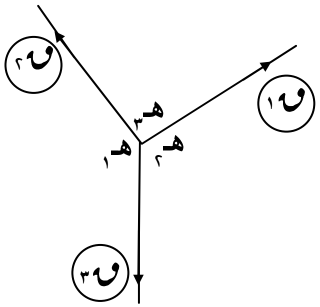
فى الشكل المقابل المثلث أ ب حـ هو مثلث القوى

أى أن :

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ق}_3}{\text{حـ أ}}$$

* ملاحظات :
* يمكن إستخدام أطوال أضلاع مثلث يشابه مثلث القوى
* يمكن إستخدام النسب بين أطوال الأضلاع
* أضلاع مثلث القوى منها ما ينطبق على خطوط عمل القوى و منها ما يوازيها

** قاعدة لامى
إذا إتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين



فى الشكل المقابل :

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{حا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_3}{\text{حا هـ}_3}$$

* ملاحظات :
* يمكن إستخدام جيوب الزوايا المكملة
* من المهم معرفة جيوب الزوايا و ليس قياساتها

* ملاحظة هامة :
* يمكن تحليل القوى فى إتجاهين متعامدين بزواياها القطبية إلى مركبتين فى الإتجاهين الموجبين لمحورى الإحداثيات و تكونان هما : س ، ص على الترتيب

نضع :

$$\text{س} = 0 \quad ، \quad \text{ص} = 0$$

** قاعدة هامة
إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية بحيث ألتقى خطا عمل اثنتين منهما فى نقطة (قوتان غير متوازيتين) فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمرر بهذه النقطة

* ملاحظة هامة :
رد فعل المستوى الأملس أو الحائط الأملس يكون عمودياً عليه
أما رد فعل المفصل أو رد فعل المستوى الخشن فيكون خط عمل أى منهما هو المستقيم المار بنقطة تأثيره و بنقطة تلاقى القوتين الآخرتين

حاصل الضرب القياسى و الإتجاهى لمتجهين

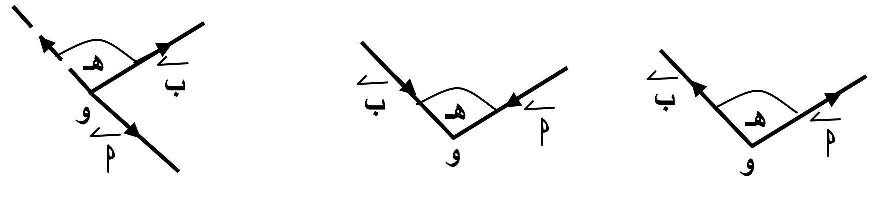
فيما يلى نعتبر : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريان ، أ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، ب = $\|\overrightarrow{ب}\|$

، هـ = قياس الزاوية الصغرى بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

، $\overrightarrow{أ} = أ_1 \overrightarrow{س} + أ_2 \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ب_1 \overrightarrow{س} + ب_2 \overrightarrow{ص}$

* تذكر أن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{أ_1^2 + أ_2^2}$

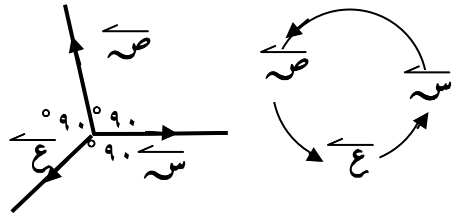
* الأشكال المختلفة للزاوية الصغرى بين متجهين :



المتجهان لهما نفس نقطة البداية — المتجهان لهما نفس نقطة النهاية — نقطة بداية أحد المتجهين هى نقطة نهاية الآخر

حيث : ٠ ≤ هـ ≤ ١٨٠ ، قياس الزاوية الكبرى بين متجهين = ٣٦٠ − هـ

* المجموعة اليمينية المتعامدة : هى ثلاث متجهات $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ؛ $\overrightarrow{ع}$ وحدة متعامدة مثنى مثنى



حاصل الضرب القياسى لمتجهين

(١) $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}$ = أ ب حتا هـ   " و منه : حتا هـ = $\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{أ\ ب}$ "

(٢) $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = أ_1 ب_1 + أ_2 ب_2$

* القيم المختلفة لحاصل الضرب القياسى لمتجهين :
* موجب إذا كانت (هـ) حادة   * سالب إذا كانت (هـ) منفرجة
* يساوى صفر إذا كانت (هـ) قائمة

" فى هذه الحالة : إما أحد المتجهين أو كلاهما متجه صفرى ، و إما أنهما متعامدان "

* أما إذا كان ق (∠ هـ) = ٠° فإنهما يكونان متوازيان و لهما نفس الإتجاه

و إذا كان ق (∠ هـ) = ١٨٠° فإنهما يكونان متوازيان و متضادتان فى الإتجاه

، و يكون : $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2}$ = ك " عدد ثابت "

* $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{٠} = \overrightarrow{٠} \odot \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{٠} \odot \overrightarrow{٠}$ = صفر
* $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \odot \overrightarrow{أ}$ " إبدالى "
* $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{أ} = أ^2$
* $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \odot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \odot \overrightarrow{ع} = ١$
* $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ص} \odot \overrightarrow{ع}$ = صفر

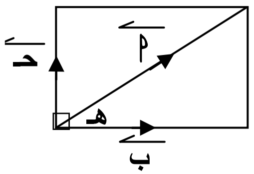
* المسقط الجبرى (المركبة الجبرية) :

مسقط $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = أ حتا هـ = $\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{ب}$

، مسقط $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه عمودى على $\overrightarrow{ب}$ = أ حا هـ = $\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{حـ}}{حـ}$

* متجه الوحدة :

متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{\overrightarrow{أ}}{أ}$



* المركبة الإتجاهية :

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = المسقط الجبرى

للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ منسوب لمتجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = $\left(\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^2} \right) \overrightarrow{ب}$

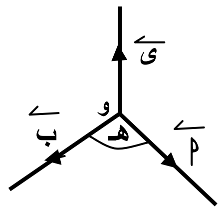
المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه عمودى على $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أ} - \left(\frac{\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^2} \right) \overrightarrow{ب}$

لأن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}$ " من الشكل المقابل "

حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين

(١) $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

و منه : $\text{حا هـ} = \dfrac{\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\|}{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}}{\text{أ ب حا هـ}}$ "



حيث : $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يجمعهما

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\ \overleftarrow{\text{ع}}$

* القيم المختلفة لحاصل الضرب القياسى لمتجهين :

* إذا كانت (هـ) قائمة فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

* إذا كان : $\text{ق}(\angle \text{هـ}) = 0^\circ$ أو $\text{ق}(\angle \text{هـ}) = 180^\circ$

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{0}$ ، و يكونان متوازيان

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{0} \times \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$ " غير إبدالى "

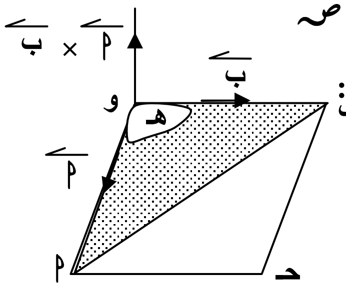
* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{0}$

* $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{0}$

* $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{س}} = -\overleftarrow{\text{ع}}$

* $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = -\overleftarrow{\text{س}}$

* $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = -\overleftarrow{\text{ص}}$



* المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين : من الشكل المقابل :

$\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\| =$ مساحة ▱ و أ ب حـ

= ٢ مساحة △ أ و ب

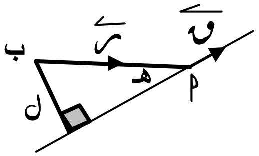
العزوم

عزوم قوة بالنسبة لنقطة " كمية متجهة تحدد مقدرة قوة على إحداث دوران "

تذكر : القوة متجه لذا إذا كان : $\overleftarrow{\text{ق}} = (\text{ل} ، \text{م}) = \text{ل}\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{م}\ \overleftarrow{\text{ص}}$

فإن : ميل خط عملها $= \dfrac{\text{م}}{\text{ل}}$ ، $\text{ق} = \|\overleftarrow{\text{ق}}\| = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{م}^2}$

* عزم قوة بالنسبة لنقطة :



إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}}$ تؤثر عند أ " لا يتوقف على موضعها "

فإن : متجه عزمها بالنسبة لنقطة ب

هو : $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

حيث : $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ب أ}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}$ = (نقطة التأثير) – (مركز العزم)

* القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة :

$\text{ع}_{\text{ب}} = \text{ق ل}$ " حيث : $\text{ل} = \text{ر حا هـ} = \dfrac{\text{ع}}{\text{ق}}$

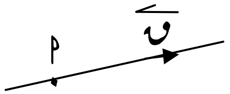
و يسمى ل ذراع القوة ، و هو طول العمود النازل من مركز العزم على خط عمل القوة "

* قاعدة الإشارة لعزم قوة حول نقطة :

عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون صفراً إذا كان خط عمل القوة يمر بنفس النقطة

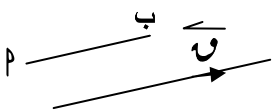
* ملاحظات و نتائج :

* ينعدم عزم قوة بالنسبة لنقطة تقع على خط عملها $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{0}$ " $\text{ع}_{\text{ب}} =$ صفر "



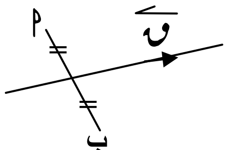
* إذا كان : $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ أو $\text{ع}_{\text{أ}} = \text{ع}_{\text{ب}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{ق}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$



* إذا كان : $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = -\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ أو $\text{ع}_{\text{أ}} = -\text{ع}_{\text{ب}}$

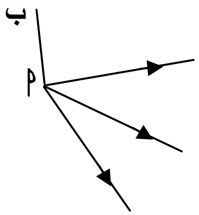
فإن : $\overleftarrow{\text{ق}}$ تنصف $\overline{\text{أ ب}}$



عزوم القوى المستوية

نظرية : مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

(١) إذا كانت : القوى كلها تؤثر فى نقطة واحدة :



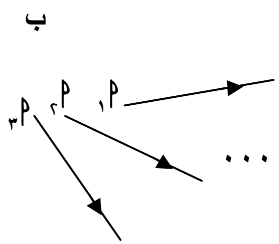
$\overleftarrow{\text{ح}}$ (المحصلة) = $\overleftarrow{\text{ق}}_1 + \overleftarrow{\text{ق}}_2 + \ldots\ldots$

١) عزم المحصلة : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

٢) عزم المحصلة = مجموع عزوم هذه القوى

$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_1 + \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_2 + \ldots\ldots$

(٢) إذا كانت كل قوة لها نقطة تأثير خاصة بها :



فإن : عزم المحصلة = مجموع عزوم هذه القوى

$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ر}}_1 \times \overleftarrow{\text{ق}}_1 + \overleftarrow{\text{ر}}_2 \times \overleftarrow{\text{ق}}_2 + \ldots\ldots$

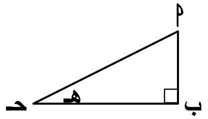
* **ملاحظات :**

* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة = صفر
فإن خط عمل المحصلة يمر بهذه النقطة

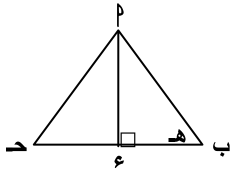
* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (أ)
= مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (ب)
فإن المحصلة توازى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (أ)
= ــ مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (ب)
فإن المحصلة تنصف $\overline{\text{أب}}$

* بعض خواص و علاقات الأشكال الهندسية :



* فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية :
أ ب = أ حـ حا هـ ، ب حـ = أ حـ حتا هـ

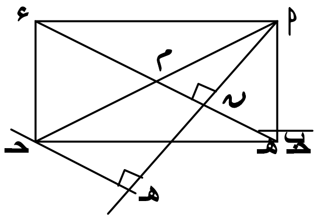


* فى Δ أ ب حـ المتساوى الساقين : " أ ب = أ حـ "
أ ء = أ ب حا هـ ، ب حـ = ٢ × أ ب حتا هـ

ملاحظة :
إذا كان : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع فإن : أ ء = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × أ ب

* طول قطر المربع = طول ضلعه × $\sqrt{٢}$

* فى المستطيل أ ب حـ ء :

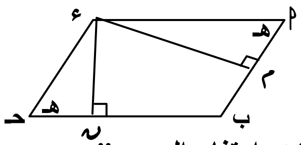


أ ن = $\frac{\text{أ ب} \times \text{أ ء}}{\text{ب ء}}$ ، أ هـ = ٢ أ ن

لأن : ق (∠ أ) = ٩٠° ، أ م = م حـ ، ب م = م ء

، $\overline{\text{أن}} \perp \overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{حـهـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ // $\overline{\text{هـحـ}}$

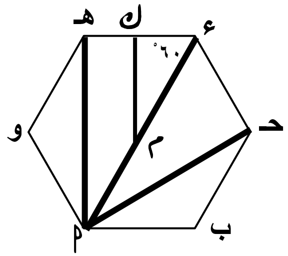
* فى متوازى الأضلاع أ ب حـ ء :



ء ن = ء حـ حا هـ ، و هو البعد العمودى بين $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$
سواء رسم داخل متوازى الأضلاع أو خارجه
ء م = ء أ حا هـ " كسابقه " بين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$

ملاحظة :
إذا كان : أ ب حـ ء معين فإن : ء ن = ء م = ء حـ حا هـ " هو إرتفاع المعين "

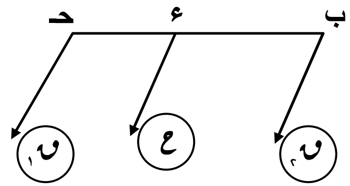
* فى السداسى المنتظم أ ب حـ ء هـ و :



إذا كان : طول ضلعه = ل
فإن : أ ء = ب هـ = حـ و = ٢ ل
، أ حـ = أ هـ = ب ء = ب و = حـ هـ = ء و = $\sqrt{٣}$ ل
= حـ هـ = ء و = $\sqrt{٣}$ ل
، م ك = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل " م مركز السداسى المنتظم "
= بعد أى ضلع من أضلاعه عن المركز

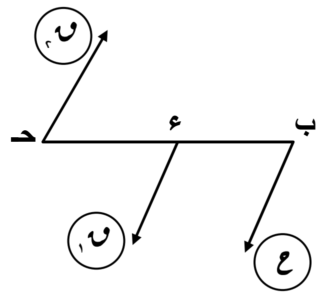
القوى المتوازية

محصلة قوتين متوازيتين



* القوتان تعملان فى إتجاه واحد
* المقدار : $ع = ق_1 + ق_2$
* الإتجاه : توازى القوتين و تعمل فى إتجاهما
* نقطة التأثير : هى ء $\in \overline{ب ح}$ و أقرب إلى القوة الأكبر " بفرض أن : $ق_1 > ق_2$ "

بحيث : $ق_1 \times ح ء = ق_2 \times ء ب$

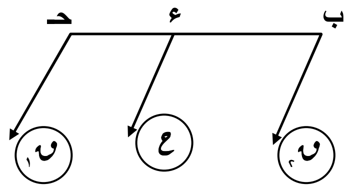


* القوتان تعملان فى إتجاهين متضادتين
* المقدار : $ع = |ق_1 - ق_2|$

" القوة الكبرى – القوة الصغرى "
* الإتجاه : توازى القوتين و تعمل فى إتجاهما
* نقطة التأثير : هى ء $\in \overline{ب ح}$

من جهة القوة الأكبر " بفرض أن : $ق_1 > ق_2$ "

بحيث : $ق_1 \times ح ء = ق_2 \times ء ب$

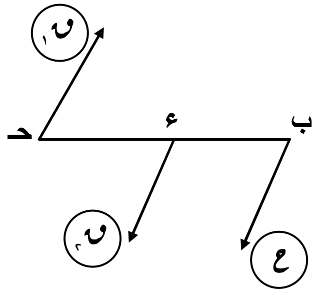


* الحالات المختلفة إذا علمت المحصلة و إحدى القوتين :

بفرض أن المعلوم : ع ، $ق_1$ و إتجاهها و البعد بينهما
* إذا كان : $ع > ق_1$ و فى إتجاه واحد

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاه واحد

، $ع = ق_1 + ق_2$ و تكون قريبة من الكبرى

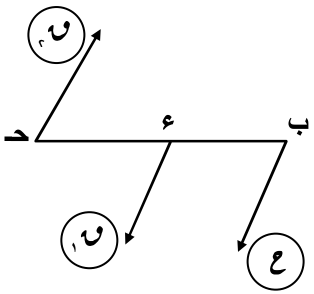


* إذا كان : $ع > ق_1$ و فى إتجاهين متضادين

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_2 - ق_1$

و الكبرى $ق_2$

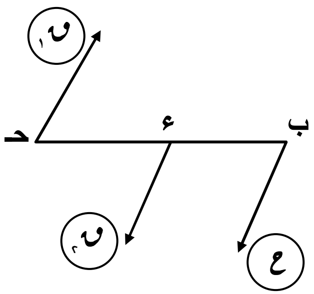


* إذا كان : $ع < ق_1$ و فى إتجاه واحد

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_1 - ق_2$

و الكبرى $ق_1$



* إذا كان : $ع < ق_1$ و فى إتجاهين متضادين

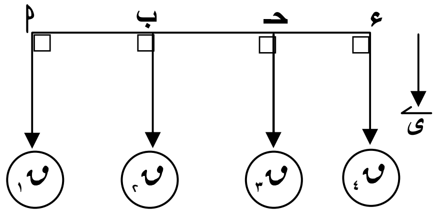
فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_2 - ق_1$

و الكبرى $ق_2$

محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاه واحد

$\overrightarrow{ع} = (ق_1 + ق_2 + \cdots)\ \overleftarrow{ى}$



* المقدار :

$ع = ق_1 + ق_2 + \cdots$

* الإتجاه :

يوازى المجموعة و يعمل فى إتجاهها

* نقطة التأثير :

تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة (يستحسن عند احد الأطراف ٲ أو ء مثلاً)
كما يلى :
مجموع عزوم القوى حول (ء مثلاً) = عزم المحصلة حول (ء)
و منه نوجد بعد نقطة تأثير المحصلة عن (ء)

محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاهات متضادة

$$\overleftarrow{ع} = (ق_1 - ق_2 - ق_3 + ق_4 + \cdots)\,\overleftarrow{ى}$$

* المقدار :

$$ع = |\, ق_1 - ق_2 - ق_3 + ق_4 + \cdots \,|$$

* الإتجاه :

يوازى المجموعة و يتحدد حسب معامل $\overleftarrow{ى}$ " إذا كان موجب فى نفس إتجاه $\overleftarrow{ى}$ ، إذا كان سالب فى إتجاه مضاد له "

* نقطة التأثير :

تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة كم سبق

توازن القوى المتوازية

الشروط :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

" تنعدم المحصلة أى : ع = ٠ "

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر

" ينعدم العزوم حول أى نقطة أى : ع = ٠ "

* ملاحظات :

* فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قضيب منتظم " وزنه يؤثر فى منتصفه " يرتكز على حاملين عند حـ ، ء

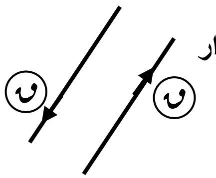
(١) $ر_1 - ر_2 = و$

(٢) العزوم حول أى نقطة = صفر

* إذا كان القضيب غير منتظم فغن وزنه لا يؤثر عند منتصفه
* الضغط على الحامل = رد الفعل
* إذا علق من (أ مثلاً) ثقل (ك) و أصبح القضيب على وشك الدوران حول (حـ) ينعدم الضغط " و رد الفعل " عند الحامل (ء)

الإزدواجات

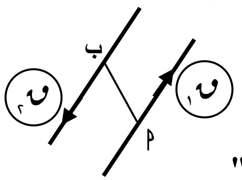
* تعريف : الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد



* نظرية : عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و هو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى

* متجه عزم الإزدواج : إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ تؤثر فى أ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثر فى ب فإن :

$$\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{ق_2}$$



* محصلة قوتى الإزدواج = صفر " أى أن : $\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = \overleftarrow{0}$ "

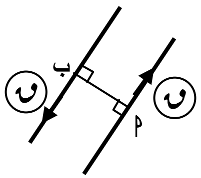
بينما : $ق_1 = ق_2$

* معيار عزم الإزدواج = مقدار إحدى قوتيه × البعد العمودى بينهما

$$ع = ق \times ل$$

= معيار عزم إحدى قوتيه بالنسبة لنقطة تقع على خط عمل القوة الأخرى

= مجموع معيارى عزمى إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة فى المستوى



* إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج :

يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوتيه تعملان فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت قوتيه تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

* توازن إزدواجين :

مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى " $\overleftarrow{ع_1} + \overleftarrow{ع_2} = \overleftarrow{0}$ "

أى : مجموع عزميهما = صفر " عزماهما متساويان فى المعيار و متضادتان فى الإتجاه "

" $ع_1 + ع_2 =$ صفر أو $ع_1 = - ع_2$ "

* تكافؤ إزدواجين :

يتساوى متجهى عزميهما " $\overleftarrow{\text{ج}}_1 = \overleftarrow{\text{ج}}_2$ "

أى : مجموع عزميهما = صفر " عزماهما متساويان فى المعيار و متحدان فى الإتجاه "

" $\text{ج}_1 = \text{ج}_2$ "

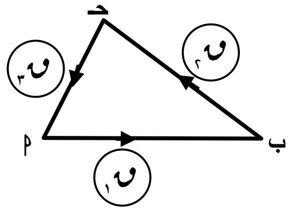
* الإزدواج المحصل :

مجموع عدة إزدواجات مستوية تكافئ إزدواجاً عزمه = مجموع عزوم تلك الإزدواجات

$\text{ج} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2 + \text{ج}_3 + \cdots\cdots + \text{ج}_{ن}$

ملاحظة : إذا كان ج = صفر فإن : مجموعة الإزدواجات تكون متوازنة

* نظرية : فى الشكل المقابل



* القوى فى إتجاه دورى واحد
* القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع Δ أ ب حـ

أى : $\frac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ق}_3}{\text{حـ أ}} = \text{ل}$ " ثابت "

* المجموعة تكافئ إزدواجاً

معيار عزمه = ٢ × ل × مساحة Δ أ ب حـ

ملاحظة : النظرية صحيحة لأى مضلع مقفل

* نتائج هامة :
* الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج
* إذا أتزن جسم تحت تأثير إزدواج و قوتين فإن القوتين تكونان إزدواجاً
* الطرق المختلفة لإثبات أن مجموعة من القوى تكافئ إزدواجاً :
* كل قوتين منهما تكون إزدواجاً (إزدواج محصل)
* القوى تؤثر فى أضلاع مضلع مقفل و فى إتجاه دورى واحد و مقاديرها متناسبة مع أطوال أضلاع المضلع
* تحليل القوى فى إتجاهين متعامدين

الديناميكا

السرعة المتوسطة

** السرعة المنتظمة (الثابتة مقداراً و إتجاهاً) :

$\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}}$ ، $\text{ن} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\overleftarrow{\text{ع}}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ع}}\ \text{ن}$

** السرعة المتوسطة :

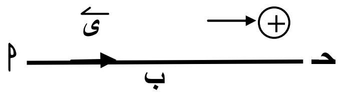
$\overleftarrow{\text{ع}}_{م} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$\overleftarrow{\text{ى}} \longrightarrow \oplus$ $\frac{\text{ف}}{\text{ن}}$

** الحالات المختلفة لحركة جسم من (أ) إلى " $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ " (ب) ثم على (حـ) " $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ " خلال الفترتين الزمنيتين ن_1 ، ن_2 على الترتيب :

* فى إتجاه واحد :

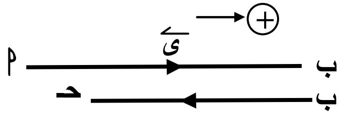
$\overleftarrow{\text{ع}}_{م} = \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}\ \overleftarrow{\text{ى}}$



* إذا توقف الجسم عند (ب) فى فترة زمنية ن_3 فإن : $\overleftarrow{\text{ع}}_{م} = \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \text{ن}_3}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

* فى إتجاهين متضادين :

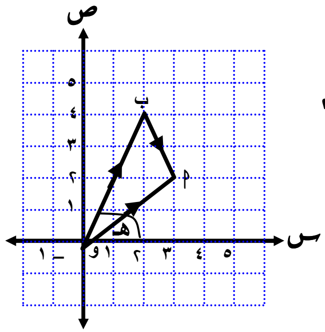
$\overleftarrow{\text{ع}}_{م} = \frac{\text{ف}_1 - \text{ف}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}\ \overleftarrow{\text{ى}}$



** ملاحظة هامة :
* يجب تحديد $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة له نفس إتجاه $\overleftarrow{\text{ف}}_1$
* إذا عاد الجسم إلى نقطة البداية فإن : $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = \overleftarrow{\text{ف}}_2 = \overleftarrow{\text{ف}}$

، $\overleftarrow{\text{ع}}_{م} = \overleftarrow{\cdot}$ ، المسافة المقطوعة = ٢ ف

* فى مستوى الإحداثيات :



إذا تحرك جسم من نقطة الأصل (و) إلى (أ) " $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ "

ثم إلى (ب) " $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ "

خلال الفترتين الزمنيتين ن_1 ، ن_2 على الترتيب

حيث : $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن : $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ف}}_1 + \overleftarrow{\text{ف}}_2$

$= \text{ف}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{ف}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$

$= (\text{س}_1 + \text{س}_2 ، \text{ص}_1 + \text{ص}_2)$

، $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} = \text{ل} \overleftarrow{\text{س}} + \text{ك} \overleftarrow{\text{ص}}$

حيث : $\text{ل} = \dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$ ، $\text{ك} = \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$

و يكون : مقدار $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ هو $\text{ع}_{\text{م}} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2}$

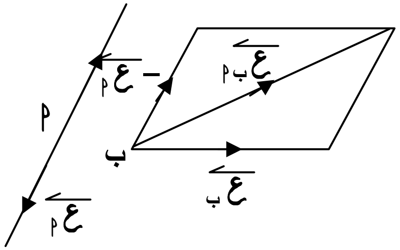
، إتجاه $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ هو ظا هـ $= \dfrac{\text{ك}}{\text{ل}}$

حيث : هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

١ كم / س $= \frac{5}{18}$ م / ث $= \frac{250}{9}$ سم / ث

السرعة النسبية

** فى الشكل المقابل : من قاعدة متوازى الأضلاع



* سرعة ب بالنسب إلى (أ)

" الراصد (أ) ، المرصود (ب) " :

$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب أ}} = \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$

* سرعة (أ) بالنسبة إلى (ب) " الراصد (ب) ، المرصود (أ) " :

$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$

* $\| \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ ب}} \| = \| \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{ب أ}} \|$

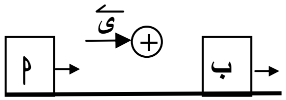
** ملاحظة هامة :

يجب تحديد $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة له نفس إتجاه متجه سرعة أحد الجسمين (أ) أو (ب)

** الحالات المختلفة لحركة الجسمين (أ) و (ب) :

* فى إتجاه واحد :

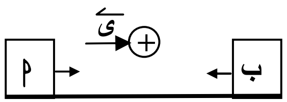
$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = (\text{ع}_{\text{أ}} - \text{ع}_{\text{ب}}) \overleftarrow{\text{ى}}$



* إذا كان : $\text{ع}_{\text{أ}} = \text{ع}_{\text{ب}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = \overleftarrow{0}$ ، $\text{ع}_{\text{أ ب}} = 0$

* فى إتجاهين متضادين :

$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = (\text{ع}_{\text{أ}} + \text{ع}_{\text{ب}}) \overleftarrow{\text{ى}}$

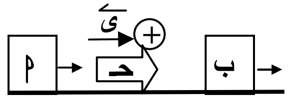


* إذا كان : $\text{ع}_{\text{أ}} = \text{ع}_{\text{ب}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}} = 2 \overleftarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ ، $\text{ع}_{\text{أ ب}} = 2 \text{ع}_{\text{أ}} = 2 \text{ع}_{\text{ب}}$

** حركة المقذوفات (الصاروخ ، الطوربيد ، ٠٠٠)

* سرعة المقذوف (حـ) = $ع_{أ} + ع_{حـ}$

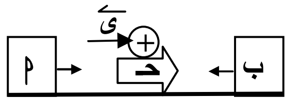
* إذا كان : (أ) و (ب) فى إتجاه واحد



فإن سرعة (حـ) بالنسبة إلى (ب) :

$$\overleftarrow{ع_{حـب}} = (ع_{أ} + ع_{حـ} - ع_{ب})\ \overleftarrow{ى}$$

* إذا كان : (أ) و (ب) فى إتجاهين متضادين



فإن سرعة (حـ) بالنسبة إلى (ب) :

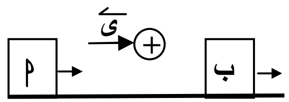
$$\overleftarrow{ع_{حـب}} = (ع_{أ} + ع_{حـ} + ع_{ب})\ \overleftarrow{ى}$$

* $ف = ع_{حـب} \times ن$

* تراعى إتجاهات حركة كل من (أ) و (ب) و (حـ) بالنسب للمتجه $\overleftarrow{ى}$

** حركة القطارات

* فى إتجاه واحد :

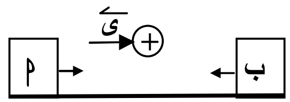


$$\overleftarrow{ع_{أ}} = (ع_{أ} - ع_{ب})\ \overleftarrow{ى}$$

* زمن التجاور " زمن عبور أحدهما للآخر ... عبور أحدهما لكوبرى ٠٠٠ "

$$ن = \frac{ف_{١} + ف_{٢}}{|ع_{أ} - ع_{ب}|}$$ حيث : $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ طولا القطرين

* فى إتجاهين متضادين :



$$\overleftarrow{ع_{أ}} = (ع_{أ} + ع_{ب})\ \overleftarrow{ى}$$

* زمن التجاور " زمن عبور أحدهما للآخر ... عبور أحدهما لكوبرى ٠٠٠ "

$$ن = \frac{ف_{١} + ف_{٢}}{ع_{أ} + ع_{ب}}$$ حيث : $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ طولا القطرين

الحركة المستقيمة بعجلة منتظمة

القوانين

* $ع = ع_{.} + حـ\ ن$
* $ف = ع_{.}\ ن + \frac{١}{٢}\ حـ\ ن^{٢}$
* $ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢\ حـ\ ف$

ملاحظات :

* $حـ = \frac{ع_{٢} - ع_{١}}{ن_{٢} - ن_{١}}$

* إذا بدأ الجسم الحركة من السكون فإن : $ع_{.} = ٠$

* إذا وقف الجسم (سكن) فإن : $ع = ٠$

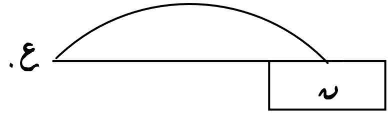
* إذا تحرك الجسم بعجلة (عجلة منتظمة) فإن : $حـ > ٠$
أما إذا تحرك بعجلة تقصيرية (تقصير منتظم) فإن : $حـ < ٠$

* إذا تمت الحركة علة مراحل مختلفة فى نوعيتها
تدرس كل مرحلة على حدة حسب معطياتها

* $ع_م$ لحركة جسم خلال فترة زمنية = ع فى منتصف هذه الفترة

** إذا كانت الحركة خلال ثانية واحدة :

فإن : $ع_م = ع_. + حـ \times (ن - \frac{1}{2})$

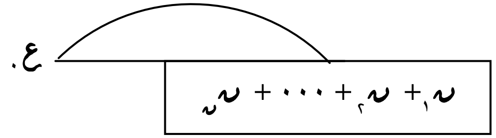


** إذا كانت الحركة خلال عدة ثوانى

: $ن_1 ، ن_2 ، \cdots ، ن_ن$

فإن : $ع_م = \frac{ف}{\text{عدد الثوانى}}$

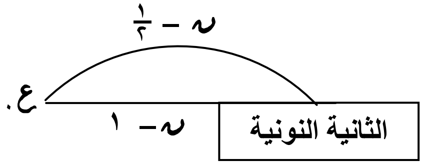
$= ع_. + حـ \times (\frac{ن_1 + ن_2 + \cdots + ن_ن}{\text{عدد الثوانى}} - \frac{1}{2})$



** إذا كانت الحركة خلال الثانية النونية :

فإن : $ع_م = \frac{ف_ن}{1}$

$= ع_. + حـ \times (ن - \frac{1}{2})$



الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية

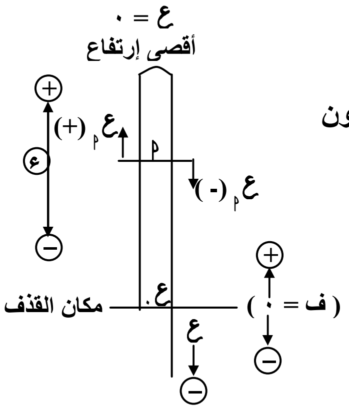
القوانين

لأعلى	لأسفل
$ع = ع_. - ء ن$	$ع = ع_. + ء ن$
$ف = ع_. ن - \frac{1}{2} ء ن^2$	$ف = ع_. ن + \frac{1}{2} ء ن^2$
$ع^2 = ع_.^2 - 2 ء ف$	$ع^2 = ع_.^2 + 2 ء ف$

ملاحظات :

* إذا سقط الجسم رأسياً لأسفل فإن : $ع_. = 0$

* إذا قذف الجسم رأسياً لأعلى فإن :



** عند أقصى إرتفاع تصبح ع = ٠ ثم يهبط من السكون

** زمن أقصى إرتفاع = $\frac{ع_.}{ء}$

، أقصى إرتفاع = $\frac{ع_.^2}{2 ء}$

** زمن الصعود = زمن الهبوط

** سرعة الجسم التى يعود بها إلى نقطة القذف = سرعة القذف

** سرعة الجسم و هو صاعد عند أى نقطة = سرعته عند و هو هابط عند نفس النقطة
و تكون موجبة و هو صاعد ، و سالبة و هو هابط

** الإزاحة " ف " تكون موجبة أعلى نقطة القذف ، و تكون سالبة أسفل نقطة القذف ، و تساوى صفر عند نقطة القذف

تفاضل الدوال المتجهة

جدول تفاضل الدوال المتجهة

المتجه	بإستخدام المتجهات	بإستخدام القياسات الجبرية
الإزاحة	$\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ر}} - \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{٠}}$	$\text{ف} = \text{ر} - \text{ر}_{\text{٠}}$
السرعة	$\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ر}}}{\text{ء ن}}$	$\text{ع} = \frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء ر}}{\text{ء ن}}$
العجلة	$\overleftarrow{\text{جـ}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{ء ن}}$	$\text{جـ} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$

ملاحظات :

* نحصل على متجه الموضع الإبتدائى $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{٠}}$ بوضع $\text{ن} = \text{٠}$ فى المتجه العام $\overleftarrow{\text{ر}}$
* يعود الجسم إلى نقطة البداية عندما $\text{ف} = \text{٠}$
* يسكن الجسم لحظياً أو يغير إتجاه حركته عندما $\text{ع} = \text{٠}$
* تكون الحركة متسارعة عندما $\text{ع جـ} > \text{٠}$ لكل $\text{ن} > \text{٠}$
بينما تكون تقصيرية عندما $\text{ع جـ} < \text{٠}$ لكل $\text{ن} > \text{٠}$
و لمعرفة فترات التسارع و التقصير نحل المتباينتين السابقتين أو ندرس الإشارات كما مبين فى الجدول المقابل و تكون :
فترة التسارع التى تكون فيها إشارة ع جـ موجبة
و فترة التقصير تكون فيها إشارة ع جـ سالبة

* جدول نوع الحركة

العجلة	نوع الحركة
تساوى صفر	منتظمة (الجسم يتحرك بسرعة منتظمة)
تساوى عدد ثابت	منتظمة التغير
دالة فى ن (تحتوى على ن)	متغيرة

كمية الحركة

* متجه كمية الحركة $\overleftarrow{\text{م}}$ للجسيم هو حاصل ضرب كتلة الجسيم فى متجه سرعته
* بالمتجهات : $\overleftarrow{\text{م}} = \text{ك} \times \overleftarrow{\text{ع}}$ حيث : ك كتلة الجسيم ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجه سرعته اللحظية
* بالقياسات الجبرية : $\text{م} = \text{ك} \times \text{ع}$
* وحدات قياس كمية الحركة

ك	ع	م
جم	سم / ث	جم . سم / ث
كجم	م / ث	كجم . م / ث

* التغير فى كمية الحركة

* $\overleftarrow{\text{م}}_{2} - \overleftarrow{\text{م}}_{1} = \text{ك}\,(\overleftarrow{\text{ع}}_{2} - \overleftarrow{\text{ع}}_{1})$

* $$\text{م}_{2} - \text{م}_{1} = \begin{cases} \text{ك}\,(\text{ع}_{2} - \text{ع}_{1}) & \text{إذا كانت السرعة ف إتجاه واحد} \\ \text{ك}\,(\text{ع}_{2} + \text{ع}_{1}) & \text{إذا كانت السرعة ف إتجاهين متضادين} \end{cases}$$

قوانين نيوتن

القانون الأول

* يظل كل جسم على حالته من سكون أو حركة منتظمة ما لم يؤثر عليه مؤثر خارجي يغير من حالته

* معادلة الحركة المنتظمة :
فى حالة (السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة)
∵ الحركة منتظمة ، فإن المجموع الجبرى لمركبات القوى المؤثرة على الجسم فى إتجاه الحركة و الإتجاه العمودى عليه ينعدم أى أن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\cdot}$

* ملاحظات :
* قوة المحرك " لسيارة أو قطار مثلاً " تكون دائماً فى نفس إتجاه حركة الجسم و تساوى المقاومة الكلية
* إذا كانت المقاومة تتغير طردياً مع السرعة ($\text{م} \propto \text{ع}$) فإن : $\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$
* إذا كانت المقاومة تتغير عكسياً مع السرعة ($\text{م} \propto \frac{1}{\text{ع}}$) فإن : $\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$

القانون الثانى

* معدل تغير كمية حركة الجسم بالنسبة للزمن يتناسب مع القوة المحدثة له و يكون فى إتجاهها

* الصور المتجهة :

* $\overleftarrow{\text{ق}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{م}}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء ن}} (\text{ك} \times \overleftarrow{\text{ع}})$

* إذا كانت الكتلة ثابتة فإن : $\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{حـ}}$

* الصور الجبرية :
$\text{ق} = \text{ك} \times \text{حـ}$

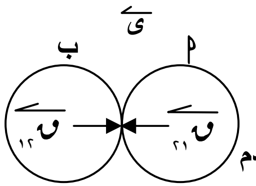
وحدات القياس المستخدمة		
ك	حـ	ق
جم	سم / ث^2	داين
كجم	م / ث^2	نيوتن
١ نيوتن = $١٠^٥$ داين		
تراعى الدقة عند إستخدامها		

* ملاحظات :
* المقصود بالقوة (ق) " القوة المحدثة للعجلة " هى : محصلة القوى الموازية لخط الحركة و المؤثرة على الجسم
* تنعدم محصلة القوى فى الإتجاه العمودى على إتجاه الحركة
* إذا وجدت قوى مائلة على إتجاه الحركة تحلل فى إتجاهين متعامدين أحدهما يوازى إتجاه الحركة
* المقاومة (م) تكون دائماً عكس إتجاه الحركة
* الوحدات التثاقلية :
١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين
* العلاقة بين الكتلة و الوزن :

الجسم الذى كتلته (ك) يكون وزنه (و) = $\begin{cases} \text{ك} & \text{وحدة تثاقلية} \\ \text{ك ء} & \text{وحدة مطلقة} \end{cases}$

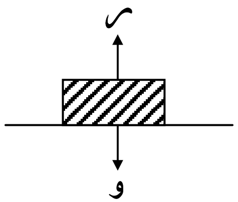
القانون الثالث

* لكل فعل رد فعل مساوٍ له فى المقدار و مضاد له فى الإتجاه

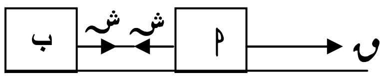


* التعبير الرياضى :
* مجموع القياسات الجبرية للقوى المتبادلة بين أى جسمين تنعدم
أى أن : $\overleftarrow{\text{ق}}_{21} + \overleftarrow{\text{ق}}_{12} = 0$

* إذا وضع جسم على نضد أفقى فإن :
ضغط الجسم على النضد = رد فعل النضد على الجسم
ملاحظة : الضغط = وزن الجسم



* الجسم (ﻤ) يجذب الجسم (ب)
قوة شد (ﻤ) للجسم (ب)
= قوة شد (ب) للجسم (ﻤ)



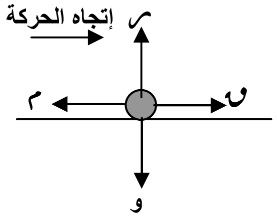
بعض أوضاع الأجسام و معادلات حركتها :

* على مستوى أفقى
* بقوة أفقية
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق − م = ٠ ، ر = ك ء

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق − م ، ر = ك ء

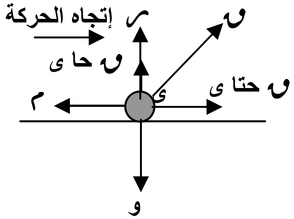


* بقوة مائلة
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق حتا ى − م = ٠ ، ر + ق حا ى = ك ء

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق حتا ى − م ، ر + ق حا ى = ك ء

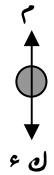


* الحركة الرأسية
* تحت تأثير وزنه
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ك ء − م = ٠

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ك ء − م

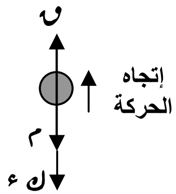


* تأثير قوة لأعلى
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق − ك ء − م = ٠

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق − ك ء − م

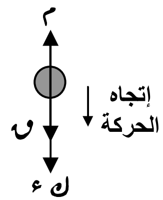


* تأثير قوة لأسفل
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق + ك ء − م = ٠

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق + ك ء − م

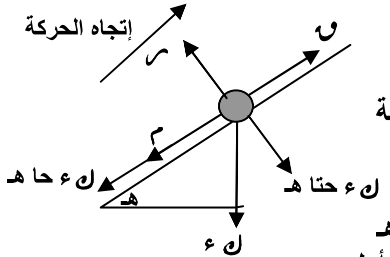


* على مستوى مائل
* بتأثير قوة فى إتجاه خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق − م − ك ء حا هـ = ٠ ، ر = ك ء حتا هـ

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق − م − ك ء حا هـ ، ر = ك ء حتا هـ



* ملاحظة : فى حالة عدم وجود مقاومة أو المستوى أملس :
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

ق − ك ء حا هـ = ٠ ، ر = ك ء حتا هـ

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق − ك ء حا هـ ، ر = ك ء حتا هـ

* إذا كان : ق > ك ء حا هـ فإن : الحركة لأعلى ، إذا كان : ق < ك ء حا هـ فإن : الحركة لأسفل ، إذا كان : ق = ك ء حا هـ فإن : الحركة منتظمة أو سكون
* إذا تحرك الجسم تحت تأثير وزنه فقط أو إنعدمت ق :

فإن : عند الحركة لأعلى : جـ = − ء حا هـ ، لأسفل : جـ = ء حا هـ

* بتأثير قوة أفقية
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

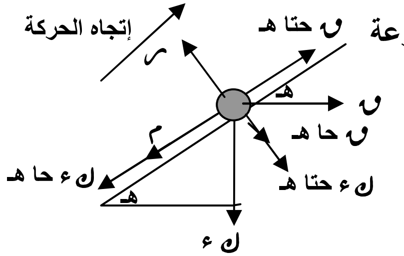
ق حتا هـ − م − ك ء حا هـ = ٠

، ر = ق حا هـ + ك ء حتا هـ

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق حتا هـ − م − ك ء حا هـ

، ر = ق حا هـ + ك ء حتا هـ



* بتأثير قوة مائلة على خط أكبر ميل بزاوية (ى)
* السكون ، السرعة المنتظمة ، الحركة بأقصى سرعة

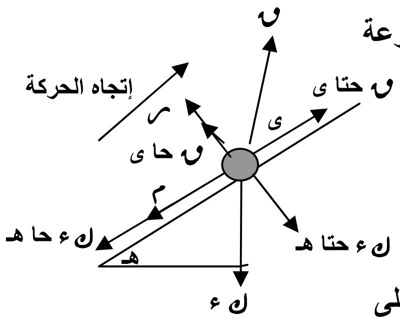
ق حتا ى − م − ك ء حا هـ = ٠

، ر + ق حا ى = ك ء حتا هـ

* بعجلة منتظمة

ك جـ = ق حتا ى − م − ك ء حا هـ

، ر + ق حا ى = ك ء حتا هـ



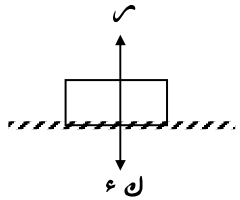
* ملاحظة : إذا كانت الحركة لأسفل تكون (م) لأعلى

* حركة المصاعد و معادلات الحركة

* الجسم موضوع على أرضية المصعد

* المصعد ساكن أو يتحرك بسرعة منتظمة

ر = ك ء



* المصعد يتحرك لأعلى بعجلة (حـ)

ر = ك (ء + حـ)

ر > ك ء

* المصعد يتحرك لأسفل بعجلة (حـ)

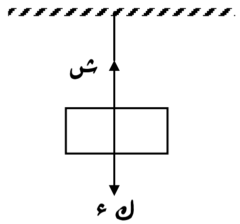
ر = ك (ء – حـ)

ر < ك ء

* الجسم معلق من سقف مصعد

* المصعد ساكن أو يتحرك بسرعة منتظمة

ش = ك ء



* المصعد يتحرك لأعلى بعجلة (حـ)

ش = ك (ء + حـ)

ش > ك ء

* المصعد يتحرك لأسفل بعجلة (حـ)

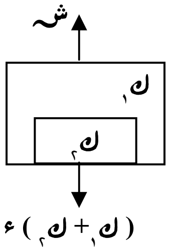
ش = ك (ء – حـ)

ش < ك ء

* المصعد و محتوياته

* المصعد ساكن أو يتحرك بسرعة منتظمة

ش̃ = (ك$_1$ + ك$_2$) ء



* المصعد يتحرك لأعلى بعجلة (حـ)

ش̃ = (ك$_1$ + ك$_2$) (ء + حـ)

* المصعد يتحرك لأسفل بعجلة (حـ)

ش̃ = (ك$_1$ + ك$_2$) (ء – حـ)

* ملاحظات :

*

وحدات القياس المستخدمة			
ك	حـ	ء	ر ، ش ، ش̃
جم	سم / ث^2	٩٨٠ سم / ث^2	داين
كجم	م / ث^2	٩,٨ م / ث^2	نيوتن

* ض (الضغط عل أرضية المصعد) = ر (رد الفعل)

* ك ء " الوزن الحقيقى " يعطى بالميزان المعتاد

* ش̃ ، ر ، ص ، ش " الوزن الظاهرى " يعطى بالميزان الزنبركى

الدفع و التصادم

الدفع

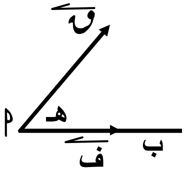
* إذا أثرت قوة ($\overrightarrow{\text{ق}}$) على جسيم ثابت الكتلة لفترة زمنية (ن) فإن :
حاصل ضرب متجه القوة فى زمن تأثيرها يسمى دفع هذه القوة ($\overrightarrow{\text{د}}$)
* بالمتجهات : $\overrightarrow{\text{د}} = \overrightarrow{\text{ق}} \times \text{ن}$
* بالقياسات الجبرية : $\text{د} = \text{ق} \times \text{ن}$
* العلاقة بين التغير فى كمية الحركة و دفع القوة :
$\text{د} = \text{ق} \times \text{ن} = \text{ك} (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)$
* وحدات قياس الدفع

ق	ن	ك	ع	د	
داين	ث	جم	سم / ث	داين . ث	جم . سم / ث
نيوتن	ث	كجم	م / ث	نيوتن . ث	كجم . م / ث

التصادم

* إذا تصادمت كرتان ملساوتان فإن مجموع كميتى حركتهما لا يتغير نتيجة للتصادم
* القوانين :
  * تصادم مرن (ينفصل الجسمان بعد التصادم) :
  $\text{ك}_1 \text{ع}_1 + \text{ك}_2 \text{ع}_2 = \text{ك}_1 \text{ع}_1^{/} + \text{ك}_2 \text{ع}_2^{/}$
  * تصادم غير مرن (يلتصق الجسمان بعد التصادم) : $\text{ك}_1 \text{ع}_1 + \text{ك}_2 \text{ع}_2 = (\text{ك}_1 + \text{ك}_2) \text{ع}$
* ملاحظات :
  * تحديد إشارة القياس الجبرى للسرعات قبل و بعد التصادم حسب إتجاه متجه الوحدة الذى يفرض سلفاً
  * يجب أن تكون الكتل بنفس الوحدات ، و كذلك السرعات
  * السرعة المجهولة تكتب موجبة فى القانون ثم تحدد إشارتها بعد الإختصار
  * الدفع المتبادل بين الجسمين المتصادمين = التغير فى كمية حركة أى منهما مع مراعاة إتجاهات السرعات
  * ضغط أحد الجسمين المتصادمين على الآخر $\text{ق} = \frac{\text{د}}{\text{ن}}$
  * إذا ألتصق الجسمان بعد التصادم و كونا جسماً واحداً و تحرك هذا الجسم بعد التصادم تحت تأثير مقاومة حتى توقف فإن : $0 = \text{ع}_0^2 + 2\,\text{حـ}\,\text{ف}$ ، حيث : ع_0 سرعة الجسم بعد التصادم ، $\text{ك}\,\text{حـ} = -\text{م}$

الشغل



* الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة فى تحريك جسم من موضع إبتدائى إلى موضع نهائى يقدر بحاصل الضرب القياسى لمتجه القوة فى متجه الإزاحة بين هذين الموضعين أى أن :
$\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ف}} = \text{ق ف جتا هـ}$
* ملاحظات :
  * إذا كانت : هـ حادة كان الشغل موجباً ، إذا كانت : هـ منفرجة كان الشغل سالباً " شغلاً مقاوماً " ، إذا كانت : هـ قائمة كان الشغل = صفراً
  * إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{أ}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}} = \text{ب}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overrightarrow{\text{ص}}$
  فإن : $\text{ش} = \text{أ}_1 \text{ب}_1 + \text{أ}_2 \text{ب}_2$
  * إذا كان متجه القوة يوازى متجه الإزاحة و فى إتجاهها فإن : ش = ق ف
  * إذا كان متجه القوة عمودى على متجه الإزاحة فإن : ش = صفر
  * إذا تحرك جسم من موضع ثم عاد إلى نفس الموضع فإن الشغل = صفر
  * إذا حدثت للجسم إزاحتين متتاليتين تحت تأثير قوة ما فإن : $\text{ش} = \text{ش}_1 + \text{ش}_2$
  * إذا تحرك جسم تحت تأثير قوة و مقاومة مسافة (ف) فإن :
  شغل القوة : $\text{ش}_1 = \text{ق ف}$ ، شغل المقاومة = − م ف
  و يكون الشغل المحصل : $\text{ش} = \text{ش}_1 + \text{ش}_2 = (\text{ق} - \text{م}) \text{ف}$
  * إذا تحرك جسم وزنه " و " على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ى فإن :
    * الشغل المبذول من وزن الجسم = + ك ء حا ى ف " إذا كان الجسم يتحرك لأسفل "
    * الشغل المبذول من وزن الجسم = − ك ء حا ى ف " إذا كان الجسم يتحرك لأعلى "
* وحدات قياس الشغل

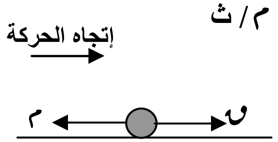
ق	ف	ش
داين	سم	إرج
نيوتن	م	جول
ث كجم	م	ث كجم . م
١ ث كجم . م = ٩,٨ نيوتن . م (جول)		
الجول = $١٠^{٧}$ إرج		

القدرة

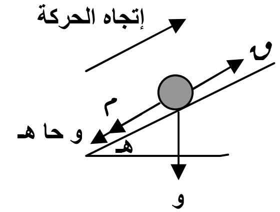
* القدرة هى معدل بذل الشغل بالنسبة للزمن
* القدرة = $\frac{\text{ء ش}}{\text{ء ن}}$ = $\frac{\text{ء}}{\text{ء ن}}$ ($\overline{\text{ق}}$ ⊙ $\overline{\text{ف}}$)
* إذا كانت : $\overline{\text{ق}}$ ثابتة فإن : القدرة = $\overline{\text{ق}}$ ⊙ $\overline{\text{ع}}$
* إذا كانت : $\overline{\text{ق}}$ ثابتة و فى إتجاه $\overline{\text{ع}}$ فإن : القدرة = ق ع
* وحدات قياس القدرة

ق	ف	ع	القدرة
نيوتن	م	م / ث	جول / ث = وات = 10^{7} إرج / ث
داين	سم	سم / ث	إرج / ث
ث كجم	م	م / ث	ث كجم . م / ث = ٩,٨ جول / ث
الحصان = ٧٥ ث كجم . م / ث = ٠,٧٣٥ كيلو وات			

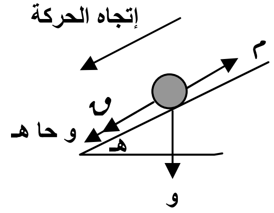
* ملاحظات :
  * تستخدم القدرة الكلية (أقصى قدرة) مع أقصى سرعة
  * القدرة بالحصان = $\frac{1}{75}$ × ق (بالثقل كجم) × ع (بالمتر / ث)
  * إذا أعطيت القدرة بالحصان تضرب × ٧٥ لتصبح بالثقل كجم . م / ث
  * عندما يتحرك الجسم بسرعة منتظمة أو بأقصى سرعة فإن :
  * على خط مستقيم أفقي : ق = م
    ، القدرة = ق ع = م ع



* على مستوى مائل لأعلى :
  ق = م + و جا هـ
  ، القدرة = ق ع
  = (م + و جا هـ) ع

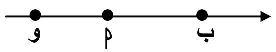


على مستوى مائل لأسفل :
ق = م − و جا هـ
، القدرة = ق ع
= (م + و جا هـ) ع



الطاقة

* الطاقة هى إمكانية بذل شغل
  و يكون للجسم طاقة ميكانيكية إذا كانت الحالة التى هو عليها مصدراً لبذل شغل
* صور الطاقة الميكانيكية : طاقة الحركة ـ طاقة الوضع
* طاقة الحركة : ط = $\frac{1}{2}$ ك ع^{2} = $\frac{1}{2}$ ك ($\overline{\text{ع}}$ ⊙ $\overline{\text{ع}}$)
* طاقة الوضع : إذا تحرك جسيم على خط مستقيم من أ
  و كانت تؤثر عليه قوة $\overline{\text{ق}}$ // هذا الخط ،
  فإن : ص$_{\text{أ}}$ = $\overline{\text{ق}}$ ⊙ $\overline{\text{أ و}}$ حيث : و موضع ثابت



* التغير فى طاقة الوضع للجسيم عند إنتقاله من أ إلى ب :
  ص$_{\text{ب}}$ − ص$_{\text{أ}}$ = − $\overline{\text{ق}}$ ⊙ $\overline{\text{أ ب}}$
* وحدات القياس :

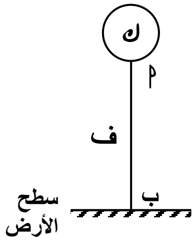
طاقة الحركة			طاقة الوضع			
ك	ع	ط	ك	ء	ف	ص
جم	سم / ث	إرج	جم	٩٨٠ سم / ث	سم	إرج
كجم	م / ث	جول	كجم	٩,٨ م / ث	م	جول
ملاحظة : كيلووات ساعة = ٣٦ × 10^{5} جول						
ملاحظة : وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس طاقة الوضع = وحدة قياس الشغل						

* مبدأ الشغل و طاقة الحركة :
  * التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول من محصلة القوى المؤثرة
    ط − ط. = $\frac{1}{2}$ ك (ع^{2} − ع.^{2}) = ش
  * معدل التغير الزمنى لطاقة حركة جسم = قدرة القوة المؤثرة عليه ($\frac{\text{ء ط}}{\text{ء ن}}$ = ق ع)
* مبدأ الشغل و طاقة الوضع :
  * التغير فى طاقة الوضع = − الشغل المبذول من محصلة القوى المؤثرة
    ص − ص. = − ش

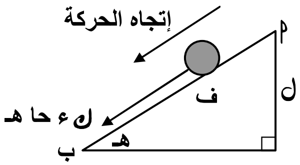
* مبدأ ثبوت الطاقة : مجموع طاقتى الحركة و الوضع يظل ثابتاً أثناء الحركة
ط + ص = ط. + ص.

* ملاحظات :
* إذا تحرك جسم من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع فإن : ط – ط.
* طاقة حركة الجسم المقذوف رأسياً لأعلى عند موضع ما أثناء الصعود = طاقة حركته عند نفس الموضع أثناء الهبوط
، و عليه فإن مقدار السرعة فى الحالتين يكون واحداً

* فى الحركة الرأسية يعتبر سطح الأرض هو نقطة الصفر لطاقة الوضع
* إذا قذف جسم من ب على سطح الأرض فإن : ص ب = صفر
* إذا سقط جسم من م فإن : ص م = صفر
* عندما يكون جسم على إرتفاع ف من سطح الأرض فإن :
ص = ك ء ف
* كلما إرتفع جسم لأعلى تزداد طاقة الوضع بسبب زيادة الإرتفاع
* كلما إرتفع جسم لأعلى تقل طاقة الحركة بسبب نقص سرعة الجسم
* فى منتصف المسافة : ط = ص
* الطاقة الكلية عند أقصى إرتفاع = طاقة الوضع
* الطاقة الكلية على سطح الأرض = طاقة الحركة



* طاقة الوضع لجسم يتحرك على خط أكبر ميل
لمستوى مائل عند موضع ما = ك ء ل
= ك ء حا هـ ف



منظومة الوحدات

الطول		
الكيلو متر (كم)	المتر (م)	السنتيمتر (سم)
١ كم = $١٠^{٣}$ م	١ م = ١٠٠ سم	١ سم = ٠,٠١ م
١ كم = $١٠^{٥}$ سم	١ م = $١٠^{-٣}$ كم	١ سم = ٠,٠٠١ كم

الكتلة (ك)		
الطن	الكيلو جرام (كجم)	الجرام (جم)
١ طن = $١٠^{٣}$ كجم	١ كجم = $١٠^{٣}$ جم	١ جم = $١٠^{-٣}$ كجم
١ طن = $١٠^{٦}$ جم	١ كجم = $١٠^{-٣}$ طن	١ سم = $١٠^{-٦}$ طن

السرعة (ع)		
كم / س	م / ث	سم / ث
١ كم / س = $\frac{٥}{١٨}$ م / ث	١ م / ث = $\frac{١٨}{٥}$ كم / س	١ سم / ث = $\frac{٩}{٢٥٠}$ كم / س
١ كم / س = $\frac{٢٥٠}{٩}$ سم / ث		

العجلة (حـ) أو (ء)	
م / $ث^{٢}$	سم / $ث^{٢}$
١ كم / س / ث = $\frac{٥}{١٨}$ م / $ث^{٢}$	١ كم / س / ث = $\frac{٢٥٠}{٩}$ سم / $ث^{٢}$

كمية الحركة (مـ)		
ك	ع	مـ
جم	سم / ث	جم ٠ سم / ث
كجم	م / ث	كجم ٠ م / ث

القوى (و ، م ، شـ ، ر ، ٠٠٠)				
الوحدات المطلقة		الوحدات التثاقلية	التحويل بينهما	
نيوتن = كجم ٠ م / $ث^{٢}$	١ نيوتن = $١٠^{٥}$ داين	ث كجم	١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن	١ نيوتن = ١ ÷ ٩,٨ ث كجم
داين = جم ٠ سم / $ث^{٢}$	١ داين = $١٠^{-٥}$ نيوتن	ث جم	١ ث جم = ٩٨٠ داين	١ داين = ١ ÷ ٩٨٠ ث جم

الدفع (د)					
و	ن	ك	ع	د	
داين	ث	جم	سم / ث	داين ٠ ث	جم ٠ سم / ث
نيوتن	ث	كجم	م / ث	نيوتن ٠ ث	كجم ٠ م / ث

الشغل (شـ) ، طاقة الحركة (ط) ، طاقة الوضع (ص)										
الوحدات	الشغل (شـ)			طاقة الحركة (ط)			طاقة الوضع (ص)			
	و	ف	شـ	ك	ع	ط	ك	ء	ف	ص
المطلقة	داين	سم	إرج	جم	سم / ث	إرج	جم	٩٨٠ سم / ث	سم	إرج
	نيوتن	م	جول	كجم	م / ث	جول	كجم	٩,٨ م / ث	م	جول
التثاقلية	ت كجم	م	ث كجم ٠ م	ث كجم ٠ م			ث كجم ٠ م			
التحويل	١ جول (وات ٠ ث) = $١٠^{٧}$ إرج						١ إرج = $١٠^{-٧}$ جول			
	١ جول / ث = ١ ÷ ٩,٨ ث كجم ٠ م/ ث						١ ث كجم ٠ م = ٩,٨ جول			
	١ جول = ١ ÷ ٣٦ × $١٠^{-٥}$ ك و ٠ س						١ ك و ٠ س = ٣٦ × $١٠^{٥}$ جول			
	١ ك و ٠ س = ٣٦ × $١٠^{١٢}$ إرج						١ إرج = ٣٦ × $١٠^{-١٢}$ ك و ٠ س			

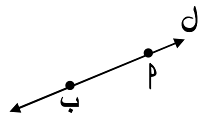
القدرة					
الوحدات	و	ف	ع	القدرة	التحويل
المطلقة	نيوتن	م	م / ث	جول / ث (وات)	١جول / ث = $١٠^{٧}$ إرج / ث
					١ جول / ث = ١ ÷ ٩,٨ ث كجم ٠ م/ ث
	داين	سم	سم / ث	إرج / ث	١ إرج / ث = $١٠^{-٧}$ جول / ث
التثاقلية	ث كجم	م	م / ث	ث كجم ٠ م / ث	١ ث كجم ٠ م / ث = ٩,٨ جول / ث
العملية				حصان	١ حصان = ٧٥ ث كجم ٠ م / ث
					١ ث كجم ٠ م / ث = ١ ÷ ٧٥ حصان
				وات	١ حصان = ٧٣٥ وات
					١ وات = ١ ÷ ٧٣٥ حصان
				كيلو وات (ك و)	١ كيلو وات = $١٠^{٣}$ وات
					١ وات = $١٠^{-٣}$ كيلو وات

الهندسة الفراغية

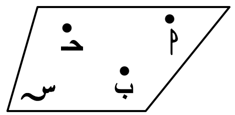
المستقيمات و المستويات

* مفاهيم و مسلمات :

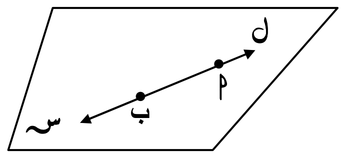
* تعيين المستقيم :
يتعين المستقيم تماماً بأى نقطتين مختلفتين
فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أ ب}$ " ل " مستقيم



* تعيين المستوى :
يتعين المستوى بثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة
فى الشكل المقابل : مستوى واحد و واحد فقط يمر بالنقط أ ، ب ، حـ

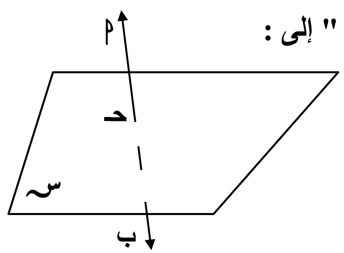


* إذا أشترك مستقيم و مستو فى نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى
فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ س~

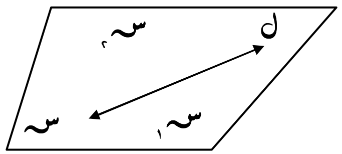


* الفراغ (الفضاء) " ف " : هو مجموعة غير منتهية من النقط يحتوى على جميع الأجسام و المستويات

* تقسيم الفراغ :
أى مستوى " تصور إمتداده من جميع جهاته " يقسم الفراغ إلى ثلاث مجموعات من النقط
فى الشكل المقابل : المستوى س~ يقسم الفراغ " ف " إلى :
(١) نقط المستوى س~ نفسه
(٢) نصف الفراغ ف١
(٣) نصف الفراغ ف٢
و يكون : ف١ ∪ س~ ∪

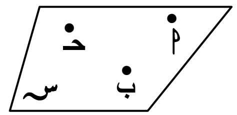


* أى مستقيم فى مستوى يقسمه إلى ثلاث مجموعات من النقط
فى الشكل المقابل : المستقيم ل يقسم المستوى س~ إلى :
(١) نقط المستقيم ل نفسه
(٢) نصف المستوى س~١
(٣) نصف المستوى س~٢
و يكون : س~١ ∪ ل ∪ س~٢

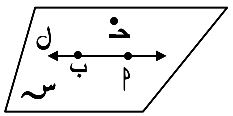


* تعيين المستوى فى الفراغ :
يتعين المستوى فى الحالات التالية :

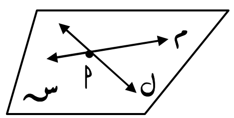
(١) ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة



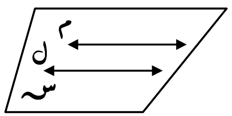
(٢) مستقيم و نقطة خارجه



(٣) مستقيمان متقاطعان



(٤) مستقيمان متوازيان



* ملاحظات :
* أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات
* أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات
* أى مستقيم فى الفراغ يمر به عدد لا نهائى من المستويات
* كل ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة يمر بها مستو واحد و واحد فقط
* إذا أشترك مستويان فى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة فإنهما ينطبقان

* الأوضاع النسبية لمستقيم و مستو :

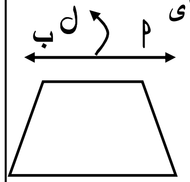
توجد ثلاث حالات مختلفة لوضع مستقيم ل بالنسبة لمستوى س هى :

* التوازى

(١) المستقيم ل لا يشترك مع المستوى المستوى س فى أى نقطة

ل ∩ س = ∅

" ل // س "

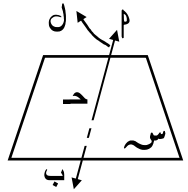


* التقاطع

(٢) المستقيم ل يقطع المستوى س فى نقطة واحدة جـ

ل ∩ س = { جـ }

" المستقيم ل قاطع للمستوى س "

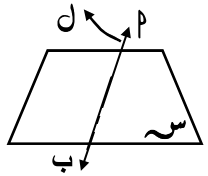


* الإنطباق

(٣) المستقيم ل يقع بتمامه فى المستوى س

ل ∩ س = ل

أى : ل ⊂ س



* الأوضاع النسبية لمستويين :

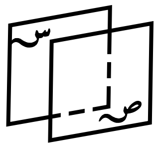
توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستويين س ، ص هى :

* التوازى

(١) المستوى ص لا يشترك مع المستوى مع المستوى س فى أى نقط

س ∩ ص = ∅

" س // ص "

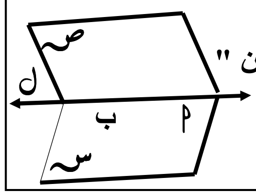


* التقاطع

(٢) المستوى ص يتقاطع مع المستوى س فى المستقيم ل

س ∩ ص = ل

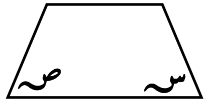
" س ، ص متقاطعان "



* الإنطباق

(٣) المستوى ص ينطبق على المستوى س (أى يشترك معه فى جميع النقاط "

س = ص



* ملاحظة :

إذا أشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة

* الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين فى الفراغ :

توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستقيمين ل ، م فى الفراغ هى :

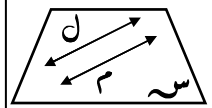
* التوازى

(٢) المستقيمان ل ، م يتوازيان

إذا كان : ل // م

فإن : ل ∩ م = ∅

و فى هذه الحالة يقع المستقيمان فى مستو واحد

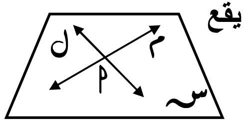


* التقاطع

(١) المستقيمان ل ، م يتقاطعان فى نقطة واحدة أ

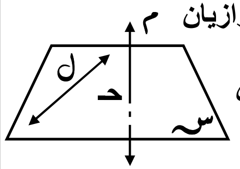
ل ∩ م = { أ }

و فى هذه الحالة يقع المستقيمان فى مستو واحد



* التخالف

(٣) المستقيمان ل ، م لا يتقاطعان و لا يتوازيان و من ثم لا يقعان فى مستوٍ واحد و يقال أنهما متخالفان أو غير مستويين



* شرط توازى مستقيمين :

ل // م إذا كان : ل ∩ م = ∅ ؛ ل ، م يقعان فى مستوى واحد

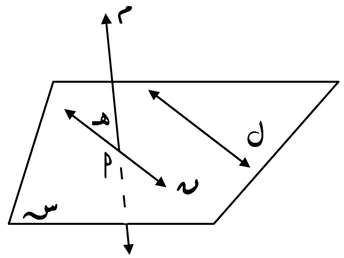
* ملاحظات :

* الإنطباق حالة خاصة من التوازى
* المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان
* أى مستقيمين فى الفراغ إما أن يكونا :
* مستويين معاً (يقعان فى مستو واحد) فيكونا متوازيين أو متقاطعين
* غير مستويين معاً (لا يقعان فى مستو واحد) فيكونا متخالفين

* الزاوية بين مستقيمين متخالفين :

هى إحدى الزوايا التى يصنعها أحدهما مع أى مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازياً للآخر

فى الشكل المقابل :



ل ، م مستقيمان متخالفان ، أ ∈ م

، ل // ن ، ل ∩ ن = { أ }

، ∠ هـ هى الزاوية بين م ، ن

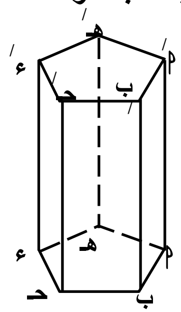
∴ ∠ هـ هى الزاوية بين المستقيمين المتخالفين ل ، م

* ملاحظة

إذا كانت الزاوية بن مستقيمين متخالفين قائمة فإن هذان المستقيمان يكونان متعامدين

* بعض المجسمات الشهيرة :

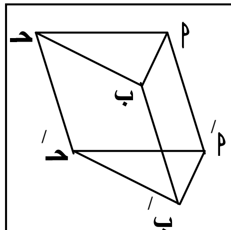
* المنشور : هو الجسم المتولد من إنتقال سطح مضلع موازيـاً لنفسه فى إتجاه ثابت و يسمى سطح المضلع فى كل من و ضعه الأول و الأخير قاعدة المنشور



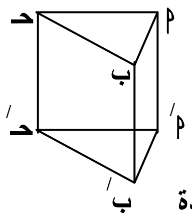
* ملاحظات :

* إذا كان إتجاه الإنتقال مائلاً على القاعدة فإن المنشور يكون مائل
* إذا كان إتجاه الإنتقال عمودياً على القاعدة فإن المنشور يكون قائم
* يسمى المنشور ثلاثياً أو رباعياً أو ... حسب عدد أضلاع قاعدته
* المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الإرتفاع
* المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
* حجم المنشور = مساحة القاعدة × الإرتفاع

* المنشور المائل :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية مائلة على القاعدة
* الأوجه الجانبية متوازيات أضلاع
* إرتفاع المنشور المائل هو البعد العمودى بين القاعدتين



* المنشور المائل :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية عمودية على القاعدة
* الأوجه الجانبية مستطيلات
* إرتفاع المنشور المائل = الحرف الجانبى



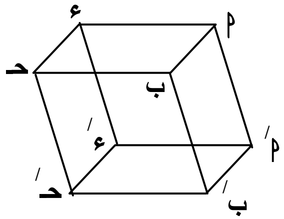
* حالات خاصة من المنشور :

* متوازى السطوح :

هو منشور كل من قاعدتيه سطح متوازى أضلاع

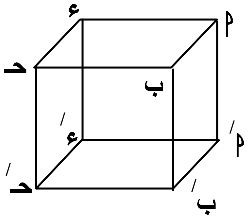
* قطره : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين ليسا فى وجه واحد ، عدد أقطاره أربعة

* و هو نوعان :



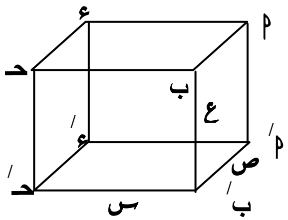
* أولاً : متوازى السطوح المائل
* أحرفه الجانبية مائلة على مستوى قاعدتيه
* أوجهه الجانبية متوازيات أضلاع
* إرتفاعه هو البعد العمودى بين القاعدتين
* أقطاره الأربعة غير متساوية فى الطول و تتقاطع فى نقطة واحدة منتصف كل منها

، و من الشكل أقطاره هى : ب ء′ ، ب′ ء ؛ أ جـ′ ، أ′ جـ



* ثانياً : متوازى السطوح القائم
* أحرفه الجانبية عمودية على مستوى قاعدتيه
* أوجهه الجانبية مستطيلات
* إرتفاعه = الحرف الجانبى
* أقطاره الأربعة غير متساوية فى الطول و تتقاطع فى نقطة واحدة و هى : مثل المائل

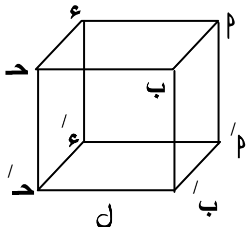
* متوازى المستطيلات :



هو منشور كل من قاعدتيه سطح مستطيل

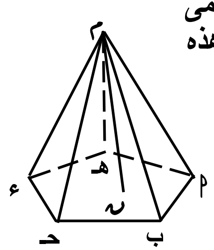
* متوازى المستطيلات له ستة أوجه كل سطح مستطيل
* قد يكون لمتوازى السطوح وجهين منهما سطح مربع و باقى الأوجه سطوح مستطيلات
* أى حرف عمودى على وجهين متقابلين
* عدد أقطاره = ٤ ، و تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة هى منتصف كل منها ، و متساوية فى الطول
* أبعاده هى : هى أطوال كل ثلاثة أحرف متلاقية فى رأس من رؤوسه ، إذا فرضنا أن أبعاده هى س ، ص ، ع وحدة طول فإن :
* مساحته الجانبية = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة
* مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + ع س) وحدة مربعة
* حجمه = س ص ع وحدة مكعبة
* طول قطره = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2}$ وحدة طول

* المكعب : هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة



* ملاحظات :
* عدد أحرفه ١٢ حرف جميعها متساوية فى الطول
* جميع أوجهه مربعات
* أى حرف عمودى على وجهين متقابلين
* له أربعة أقطار متساوية فى الطول تتقاطع فى نقطة واحدة
* إذا فرضنا أن طول حرفه = ل وحدة طول فإن :
* طول قطر أى وجه = ل $\sqrt{٢}$ وحدة طول
* طول قطره = ل $\sqrt{٣}$ وحدة طول
* مساحة كل وجه = ل^{٢} وحدة مربعة   * مساحته الجانبية = ٤ ل^{٢} وحدة مربعة
* مساحته الكلية = ٦ ل^{٢} وحدة مربعة   * حجمه = ل^{٣} وحدة مكعبة

* الهرم : إذا كان لدينا منطقة مضلعة فى مستوى ما ، و توجد نقطة لا تنتمى إلى المستوى فإن إتحاد جميع القطع المستقيمة المرسومة من هذه نقطة إلى نقط المنطقة يسمى هرماً ، يسمى المضلع قاعدة الهرم ، النقطة الخارجة تسمى رأس الهرم

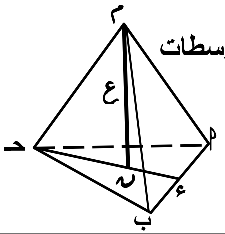


* ملاحظات :
* يسمى الهرم ثلاثياً أو رباعياً أو ... حسب عدد أضلاع قاعدته
* أحرفه الجانبية هى القطع المستقيمة الواصلة بين رأسه و رؤوس قاعدته
* أوجهه الجانبية هى سطوح مثلثات
* إرتفاع الهرم هو العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته

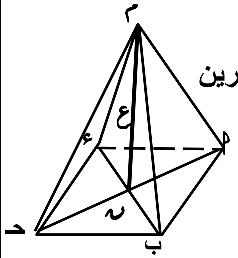
* حالات خاصة من الهرم :
* الهرم القائم : هو هرم قاعدته مضلع منتظم و إرتفاعه يلقى القاعدة فى مركزها الهندسى
* خواصه :
* قاعدة الهرم مضلع منتظم " مثلث متساوى الأضلاع ، مربع ، .... "
* جميع الأحرف الجانبية له متساوية فى الطول
* جميع الأوجه الجانبية له سطوح مثلثات متساوية الساقين و متطابقة
* إرتفاعاته الجانبية " و هى إرتفاعات الأوجه الجانبية " متساوية فى الطول

* أهم الأنواع :

* هرم ثلاثى قائم :
* القاعدة :
مثلث متساوى الأضلاع
* مركز القاعدة :
نقطة تلاقى المتوسطات

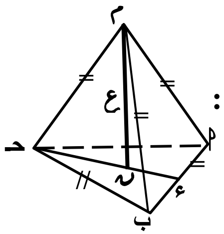


* هرم رباعى قائم :
* القاعدة :
مربع
* مركز القاعدة :
نقطة تلاقى القطرين



* الهرم الثلاثى المنتظم : هو هرم قائم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية الأضلاع

* خواصه :
* يمكن إعتبار أى وجه من أوجهه قاعدة
* الإرتفاعات الجانبية متساوية فى الطول
* فى الشكل المقابل إذا كان : طول حرفه = ل ، إرتفاعه ع فإن :
* إرتفاعاته " و هى إرتفاعات الأوجه الجانبية



* حـ ء = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل
* ء ن = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ل
* حـ ن = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ل
* إرتفاعه (ع) " م ن " = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ل   ((٣ ع^{٢} = ٢ ل^{٢}))