

قوانين الأسس

فى كل مما يأتى : م ، ن ، س ، ص $\Rightarrow$ ص⁺ ، م ، ب $\Rightarrow$ ح⁺ ، المقام $\neq$ ٠

المعنى	القانون
عند ضرب الأسس المتصلة نجمع الأسس -	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
عند قسمة الأسس المتصلة نطرح الأسس -	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
نضرب الأس الداخلى $\times$ الأس الخارجى -	$(a^m)^n = a^{m \times n}$ (قانون أس الأس)
نوزع الأس على الضرب	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
نوزع الأس على القسمة	$\frac{a^m}{a^n} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)}$
قيمة أى حد مرفوع للأس صفر تساوى الواحد	$a^0 = 1$
الأس السالب معناه قلب الأساس -	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
الأس الكسرى معناه وضع الأساس تحت جذر دليله هو مقام الكسر	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
إذا تساوت الأساسات تتساوى الأسس -	إذا كان $a^m = a^n$ فإن $s = n$
إذا تساوت الأسس إما أن تتساوى الأساسات أو الأس = صفر -	إذا كان $a^m = a^n$ فإن $a = 1$ ، $s = 0$
وذلك يرفع الطرفين للأس له	إذا كان $a^m = a^n$ فإن $a = b$

• أمثلة توضيحية على القوانين :

$$(١) \quad ٣ \text{ س} \times ٣ \text{ س} = ٩ \text{ س} = ٣ \text{ س} + ٣ \text{ س}$$

$$(٢) \quad ٧ \text{ س} \div ٧ \text{ س} = ١ \text{ س}$$

$$(٣) \quad (٥ \times ٣) \text{ س} = ١٥ \text{ س} = ٣ \text{ س} + ٣ \text{ س} + ٩ \text{ س}$$

$$(٤) \quad \left(\frac{٣}{٧}\right) \text{ س} = \frac{٣}{٧} \text{ س}$$

$$(٥) \quad (٣ \times ٥ \times ٧) \text{ س} = ١٠٥ \text{ س} = ١٠٥ \text{ س}$$

$$(٦) \quad \frac{١}{٣} \text{ س} = \frac{١}{٣} \text{ س}$$

$$(٧) \quad ٢ \text{ س} = \sqrt[٢]{٤ \text{ س}}, \quad ٣ \text{ س} = \sqrt[٣]{٢٧ \text{ س}}, \quad ٤ \text{ س} = \sqrt[٤]{١٦ \text{ س}}, \quad ٥ \text{ س} = \sqrt[٥]{٣١٢٥ \text{ س}}$$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$(٨) \quad ٦٤ \text{ س} = ٦٤ \text{ س} \leftarrow ٢٢ \text{ س} = ٢٢ \text{ س} \therefore ٢ \pm = ٢ \text{ س}, \quad ٢٥ \text{ س} = ٢٥ \text{ س} \leftarrow ٥ = ٥$$

$$(٩) \quad ٧ \text{ س} = ٧ \text{ س} \leftarrow ٢ = ٢ \text{ س}$$

$$(١٠) \quad ٧ \text{ س} = ٧ \text{ س} \leftarrow ٥ = ٥ \text{ س}$$

$$(١١) \quad ٨ = \sqrt[٣]{(٥ + \text{س})} \therefore ٨^٣ = (٥ + \text{س}) \therefore ٥٢ = ٥ + \text{س} \therefore \text{س} = ٤٧ \quad \text{برفع الطرفين للأس } \frac{٤}{٣}$$

$$\therefore ٢ = ٥ + \text{س} \therefore ١٦ = ٥ + \text{س} \therefore ١١ = \text{س}$$

ملاحظات :

(١) عند حل مسائل الأسس لابد من جعل الأساس عددا أوليا (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ،)

(٢) إذا كانت $٧ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} \times ٧ \text{ س}$ يمكن فرض $٧ \text{ س} = \text{ص} \therefore \text{ص}^٢ + ٤ \text{ ص}$

(٣) إذا كان الكسر $\frac{٣ \times ٧ \times ٥ \text{ س}}{٣ \times ٧ \times ٥ \text{ س} + ١}$ يمكن كتابته $٣ \text{ س} + ٣ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ١$

نستغنى عن شرطة الكسر

التمثيل البياني للدالة الأسية

إذا كانت $d = (s)$ فإن الخط البياني للدالة $d(s)$ يمثل بالأزواج المرتبة (s, d)

(٢) إذا كانت $1 > p > 0$



المنحنى يمر بالنقطة $(0, 1)$

المجال $\mathbb{R}$

المدى $\mathbb{R}^+$ أو $]0, \infty[$

الدالة تناقصية على $\mathbb{R}$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(١) إذا كانت $1 < p$



المنحنى يمر بالنقطة $(0, 1)$

المجال $\mathbb{R}$

المدى $\mathbb{R}^+$ أو $]0, \infty[$

الدالة تزايدية على $\mathbb{R}$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

مثال : إذا كان $d(s) = 7^s$ فأوجد قيمة s التى تحقق : $d(s) + d(1-s) = 392$
الحل :

$$392 = 7^s + 7^{1-s}$$

$$392 = d(s) + d(1-s)$$

بفرض $7^s = v$

$$392 = 7^s + 7^{1-s} = v + \frac{v}{7}$$

$$392 = \frac{v}{7} + v \quad \text{بالمضرب فى } 7 \quad \therefore 2744 = v + 7v = 8v$$

$$\therefore 8v = 2744 \quad \text{بالقسمة على } 8 \quad \therefore v = 343 \quad \therefore 7^s = 343 \quad \therefore s = 3$$

مثال : إذا كانت $d(s) = 3^s$ حل المعادلة $d(s) + d(1-s) = 270$
الحل :

$$270 = d(s) + d(1-s) = 3^s + 3^{1-s}$$

$$270 = 3^s + 3^{1-s} \quad \therefore 270 = 3^s + \frac{3}{3^s} \quad \therefore 270 = 3^s + \frac{3}{3^s}$$

$$270 = 3^s + \frac{3}{3^s} \quad \therefore 270 = \frac{3^{2s} + 3}{3^s} \quad \therefore 270 \times 3^s = 3^{2s} + 3$$

$$\therefore s = 4$$

حل آخر : $٢٧٠ = ٣^{١+س} + ٣^{١-س}$ بفرض $٣^س = ص$

$$٢٧٠ = ٣^{١+س} + ٣^{١-س} \therefore ٢٧٠ = ٣ \times ٣^س + ٣ \times ٣^{-س} \therefore ٢٧٠ = ٣ \times ص + ٣ \times \frac{١}{ص}$$

$$\therefore ٢٧٠ = (٣ + \frac{١}{٣}) \times ص \therefore ٢٧٠ = \frac{١٠}{٣} \times ص$$

$$\therefore ٨١ = ص \therefore ٣^س = ٣^٤ \therefore س = ٤$$

مثال : إذا كان $٣ = د(س)$ فأوجد قيمة $س$ التى تحقق :

$$\frac{١٠}{٢٧} = د(٢ + س) + د(١ - س) \quad \text{الحل :}$$

$$\therefore \frac{١٠}{٢٧} = ٣^{٢+س} + ٣^{١-س}$$

$$\therefore \frac{١٠}{٢٧} = ٣ \times ٣^س + ٣^{-س} \quad (\text{بفرض } ٣^س = ص)$$

$$\therefore \frac{١٠}{٢٧} = ٣ \times ص + \frac{١}{ص} \quad (\text{بضرب فى } ٢٧)$$

$$\therefore ١٠ = ٨١ص + ص \therefore ١٠ = ٩٠ص \therefore ١٠ = ٩ص \therefore ٣^{-٢} = \frac{١}{٣^٢} = \frac{١}{٩} = ص$$

$$\therefore ٣^{-٢} = ٣^س \therefore ٢ = -س \therefore س = -٢$$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $٦ = ٥^{١+س} + ٥^{س٢}$

الحل :

$$٦ = ٥^{١+س} + ٥^{س٢} \quad (\text{بفرض } ٥^س = ص \therefore ٥^{١+س} = ٥ \times ص)$$

$$\therefore ٦ = ٥ \times ص + ص^٢ \therefore ٠ = ص^٢ + ٥ص - ٦$$

$$\therefore ٠ = (ص - ١)(ص + ٦) \therefore ص = ١ \text{ أو } ص = -٦$$

$$\text{إما } ص = ١ \therefore ٥^س = ٥ \therefore س = ١ \text{ صفر}$$

$$\text{إما } ص = -٦ \therefore ٥^س = -٦ \text{ مرفوض} \quad \text{م. ح} = \{ \text{صفر} \}$$

مثال : إذا كان $٢ = (١+س)د$ $٢^{س+٤} =$ حل المعادلة : $د(س+٤) - د(س+٢) = ٢٤$

الحل : $٢ = د(س) \therefore ٢^{س+٣} = ٢^{س+٢} - ٢^{س+٧} \therefore ٢٤ = ٢^{س+٥}$

$٢ = ٢^{س+٥} \therefore ٢٤ = [٢ - ٢^٢]^{س+٥} \therefore ٢٤ = ٣ \times ٢^{س+٥}$ بالقسمة على ٣

$٢ = ٢^{س+٥} = ٨ = ٢^٣ \therefore ٣ = س+٥ \therefore س = ٢- \therefore م \cdot ح = \{٢-\}$

مثال : إذا كان $٣ = د(س)$ $س = ٣$ إثبت أن : $\frac{د(١-س)}{٩} = \frac{د(١+س)}{د(١-س)}$ - $\frac{د(١-س)}{٩}$

الحل :

$$\frac{١+س}{١-س} - \frac{١+س}{١-س} = \frac{١+س}{١-س} - \frac{١+س}{١-س} = ١-س-١-س = ٣-١-١-س = ١-س$$

$$\frac{٨٠}{٩} = \frac{١}{٩} - ٩ = ٢-٣ - ٢٣ =$$

مثال : إذا كانت $٩ = (س)$ ، $٢٧ = (س)$ حل المعادلة : $٢٥٢ = د(٣س) + د(٢س-١)$

الحل :

$$٢٥٢ = ٩^{س٣} + ٢٧^{س٢-١} \therefore ٢٥٢ = ٣^{س٣} + ٣^{س٢-٢} \therefore ٢٥٢ = ٣^{س٢-٢} \times ٢٨$$

$$٢٥٢ = ٢٨ \times ٣^{س٢-٢} \therefore ٢٥٢ = (١ + ٣^٣)^{س٢-٢} \therefore ٩ = ٣^{س٢-٢} \therefore ٢٣ = ٣^{س٢-٢} \therefore ٢ = ٣ - س٢ \therefore ٦ = س$$

$$\{ \frac{٥}{٦} \} = م \cdot ح$$

مثال : إذا كان $٨ = \sqrt[٣]{ص}$ $٣٢ = \sqrt[٣]{ص}$ أوجد قيمتى $س$ ، $ص$

$$\begin{array}{l|l} \text{الحل : } ٣٢ = \frac{٥}{٢} \text{ س} & ٨ = \frac{١}{٣} \text{ ص} \\ ٣٢ = \frac{٢}{٥} \text{ س} & ٤ = \frac{١}{٣} \text{ ص} \\ ٤ = \frac{٢}{٥} \text{ س} & ٦٤ = \frac{١}{٣} \text{ ص} \end{array}$$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $10 - \sqrt[3]{x} = 9 + \sqrt[3]{x}$

الحل : $\frac{4}{5} - \sqrt[3]{x} = 9 + \sqrt[3]{x}$ $\therefore \frac{4}{5} - \sqrt[3]{x} = 9 + \sqrt[3]{x}$

$\therefore \frac{4}{5} - \sqrt[3]{x} = 9 + \sqrt[3]{x}$ $\therefore \frac{4}{5} - \sqrt[3]{x} = 9 + \sqrt[3]{x}$

$\frac{5}{2} (1) = \sqrt[3]{x}$ ، $\frac{5}{2} (3) = \sqrt[3]{x}$

$\therefore \{ 1, 27 \} = \text{م. ح.}$ $\therefore \{ 1, 27 \} = \text{م. ح.}$

مثال : أرسم منحنى الدالة $y = x^3$ في الفترة $[-3, 4]$ و من الرسم أوجد :

(١) د (١.٥)

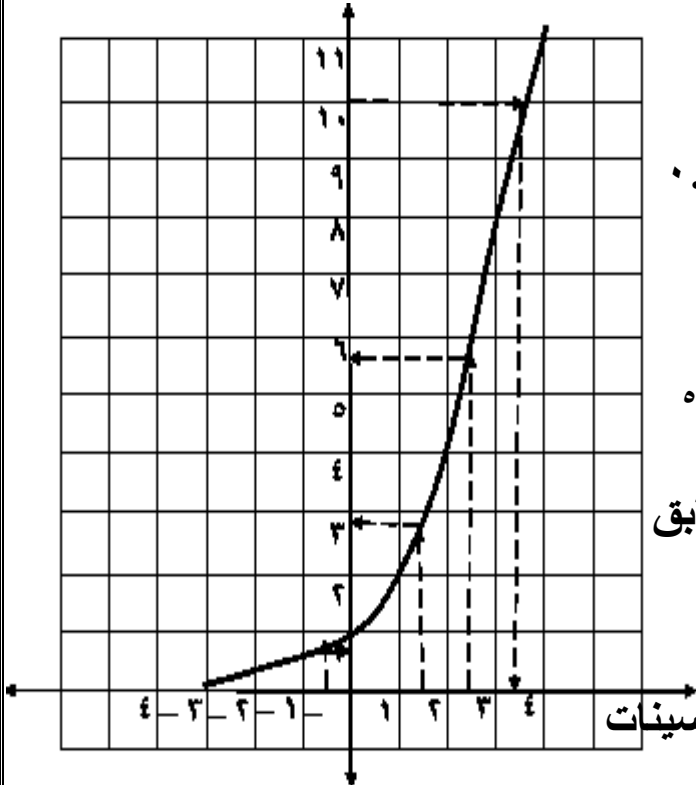
(٢) د (١.٥)

(٣) قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{32}$

(٤) حل المعادلة $y = x^3$

الحل :

س	٤	٣	٢	١	٠	١ -	٢ -	٣ -
ص	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



لإيجاد قيمة د (١.٥) :

نرسم مستقيماً عند ١.٥ يوازي محور الصادات

ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريباً ٠.٧

$\therefore 0.7 = (1.5)^3$

لإيجاد قيمة د (١.٥) نرسم كما سبق

نجد أن : د (١.٥) = ٢.٨

لإيجاد قيمة $\sqrt[3]{32}$ نلاحظ أن : $2^5 = 32$

$\therefore$ نوجد د ($\frac{5}{2}$) = د ($2\frac{1}{2}$) ونرسم كما فى السابق

$\therefore$ قيمة $\sqrt[3]{32} = 0.7$

لإيجاد حل المعادلة : د (س) = ١٠

نرسم مستقيماً عند ص = ١٠ يوازي محور السينات

يقابل المنحنى عند نقطة فنجدها تساوى تقريبا ٣.٣
 $\therefore (س) = ١٠$ عندما $٣.٣ =$

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $٣٠ = \frac{١٢٥}{س} + س$
 الحل :

بضرب الطرفين فى $س$ $\therefore س^٢ = ١٢٥ + س \times ٣٠$

$\therefore س^٢ - س \times ٣٠ - ١٢٥ = ٠$ وبالتحليل

$\therefore (س - ٢٥)(س + ٥) = ٠$

إما $س - ٢٥ = ٠$

$س = ٢٥$

$س = ٢$

إما $س + ٥ = ٠$

$س = -٥$

$\therefore س = ١$

$\therefore م.ح = \{ ٢, ١ \}$

مثال : إذا كانت : $ص = \frac{٣}{٢} = ٢ = \frac{٢}{٣} س$ فأوجد قيمة $س$ ، $ص$
 الحل :

$٨ = \frac{٢}{٣} س$

$\therefore س = \frac{٢}{٣} \times ٨$

$\therefore س = \frac{١٦}{٣}$

$\therefore س = \pm ٨$

$٨ = \frac{٣}{٢} ص$

$\therefore ص = \frac{٢}{٣} \times ٨$

$ص = \frac{١٦}{٣}$

تمارين على الأسس

[١] اكتب فى أبسط صورة :

$$(١) (٢٠٠٠^٣)^٤ \quad (٢) (٢٠٠^٣ \div ٢٠٠^٢)^٢ \quad (٣) (٢٠٠^٣ \div ٢٠٠^٢)^٣$$

[٢] اختصر لأبسط صورة :

$$(١) \frac{٨ \times ٢٩ \times ٢٦}{٥٣ \times ٢١٢} \quad (٢) \frac{٢١٢ \times ٢١٨}{٣١٦ \times ٤٨١}$$

[٣] أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

$$(١) ٦٤ = ٤^س \quad (٢) ١٢٥ = ٥^س \quad (٣) ١ = ٣^س + ٥$$

[٤] أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$(١) ٣^س + ١ = ٣ - ٣^س - ٧٢ \quad (٢) ٢^س + ١ = ٣٣ - ٢ \times ٣^س + ١٦ = ٠$$

$$(٣) ٤^س - ٣ \times ٢^س - ٤ = ٠ \quad (٤) ٩^س + ٣^س + ١ = ١٠٨$$

[٥] أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلة الآتية :

$$(١) ٢٨ = ٧ \times ٢^س, \quad ٩٨ = ٢ \times ٧^س$$

$$(٢) ٢٧ = ٣ \times ٣^س, \quad ١٢ = ٣ + ٣^س$$

[٦] أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

$$(١) \frac{١}{٢} (١ + ٣ + ٥ + ٧) \quad (٢) (\sqrt[٣]{٣})^٢ \times (\sqrt[٥]{٣})^٣$$

$$(٣) \sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٢} = \sqrt[3]{٢ \times ٢} = \sqrt[3]{٤}$$

$$(٤) (س + \frac{1}{٢}) (\frac{1}{٢} - س)$$

$$(٥) (س - \frac{1}{٣}) (\frac{1}{٣} - س) = (\frac{1}{٣} - س) (\frac{1}{٣} - س)$$

$$[٧] \text{ أثبت أن : } \frac{\frac{1}{٣} - س^٢}{\frac{1}{٣} + س^٣} = \frac{(٣٤٣ - س^٢) \times (١٦ - س^٣)}{(٤٩ - س^٣) \times (٤ - س^٩)}$$

[٨] أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$(١) س = \frac{٧}{٢} \quad (٢) \sqrt[٥]{س} = ٢٤٣ \quad (٣) \sqrt[٣]{س} = \frac{1}{٢٥}$$

[٩] إذا كانت د(س) = ٣ س فأوجد قيمة كل من : د(١ - ١) ، د(٣) ، د(٠) ، د(٢)

[١٠] إذا كانت د(س) = (١/٣) س أثبت أن : د(٢ + ٢) = ١/٩ د(٢)

[١١] إذا كانت : د(س) = ٧ س أوجد قيمة س إذا كان : د(٢ - س) + د(٢ + س) = ١٠

[١٢] مثل بيانيا منحنى الدالة د : د(س) = (١/٣) س فى الفترة [- ٣ ، ١] و من الرسم أوجد قيمة :

(١) د(٢ - ٤) ، د(١/٣) و استنتج من ذلك قيمة $\sqrt[3]{٣}$ (قيمة تقريبية)

(٢) س إذا كان د(١/٣) س = ٨

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح الباهر