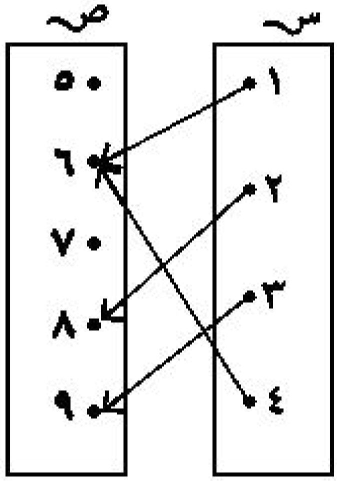
الوحدة الأولى : الدوال الحقيقية

تعريف الدالة :

إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من سـ الى صـ تسمى دالة
إذا ارتبط كل عنصر من عناصر سـ بعنصر واحد فقط من عناصر صـ
و تكتب د : سـ ⟵ صـ أو ص = د(س)

نعبر عن الدالة بطريقتين :

(١) كمجموعة من الازواج المرتبة (بيان الدالة) د : سـ ⟵ صـ
(٢) بقاعدة رياضية تسمى قاعدة الدالة (الصور التى تأخذها الدالة) : ص = د(س)



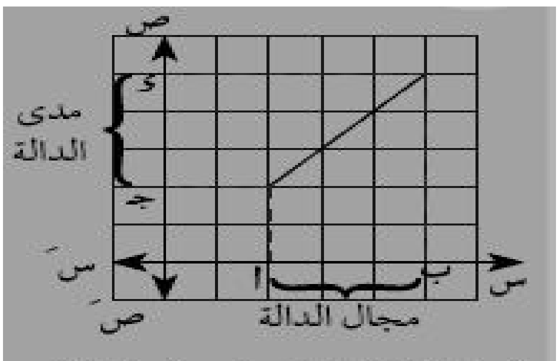
المجال و المجال المقابل و المدى :

من الشكل المقابل لدالة ما :

المجال :

هو مجموعة العناصر التى يأخذها المتغير س بحيث يكون الناتج
كمية معرفة " عدد حقيقى ". سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }
و تكون قيمه على محور السينات (الفترة المقابلة للشكل البيانى د

المجال المقابل : هو مجموعة الأعداد التى تأخذها صـ = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }



في الشكل البياني الممثل للدالة د
مجال الدالة = [أ ، ب]
مدى الدالة = [جـ ، ء]

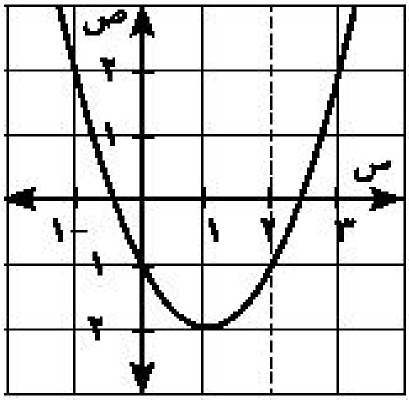
المدى : { ٦ ، ٨ ، ٩ }
مجموعة صور عناصر سـ فى صـ
(العناصر فى ص المرتبطة بعناصر س)
هو مجموعة العناصر الحقيقية التى يأخذها المتغير ص
ونحصل عليه بيانيا من محور الصادات
][أسفل قيمة ، أعلى قيمة][

الدالة الحقيقية : هى دالة كل من مجالها و مجالها المقابل مجموعة جزئية من ع

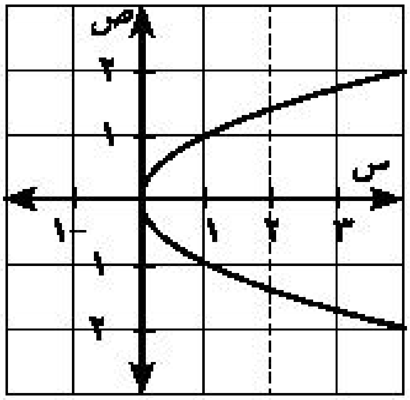
اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى ت/ ٠١١٥٤٨٠٢٨١١ ـ ٠١٠٠٦٥٢٢١٣٨

- **ملاحظة :العلاقة تكون دالة بيانيا (اختبار الخط الرأسى) :**

إذا مثلث علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد و قطع الخط الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيليهما البيانى فى نقطة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة

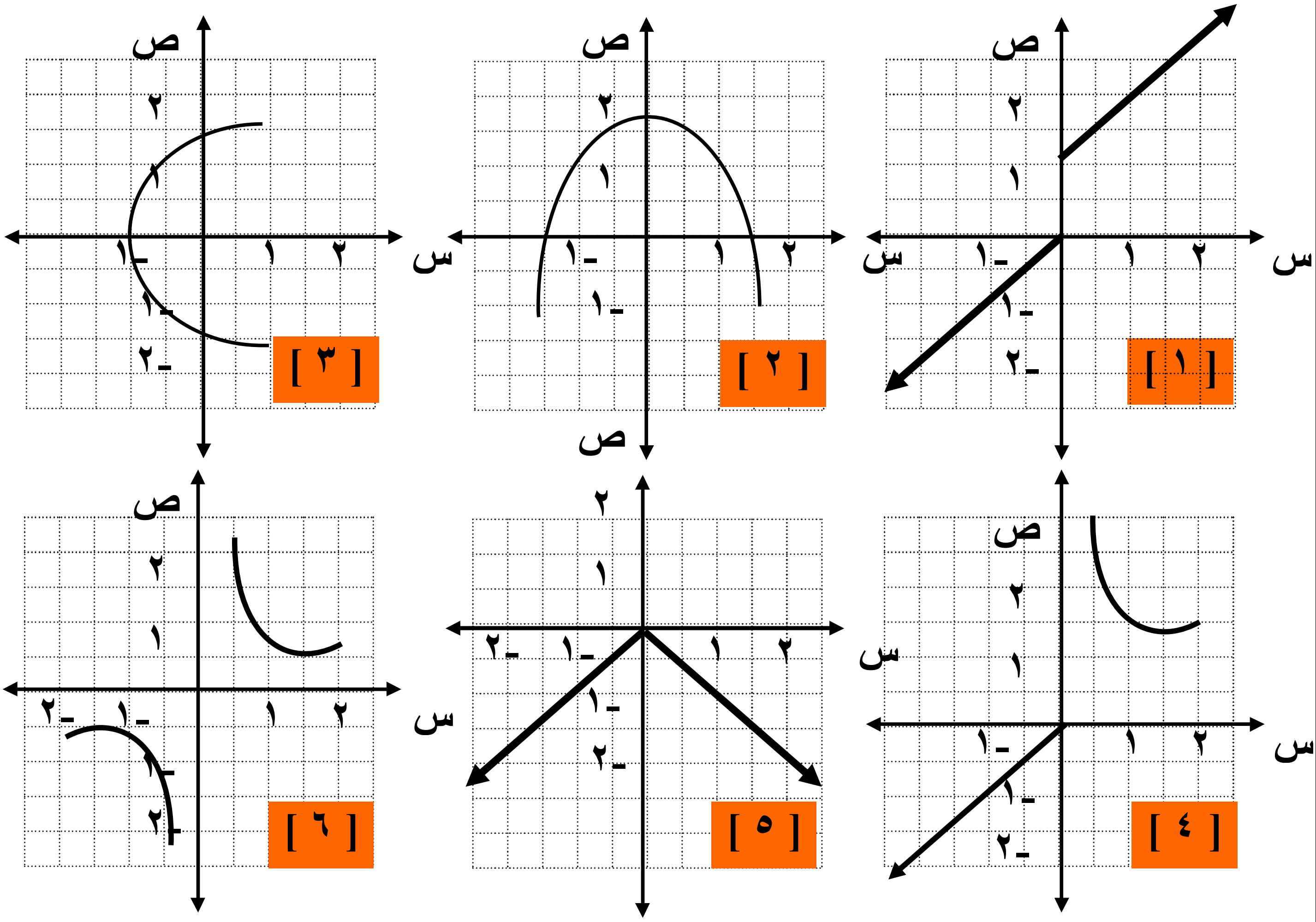


دالة



ليست دالة

مثال : أيا من الاشكال الآتية يمثل دالة فى س و لماذا ؟



الحل :

الشكل [١] :

لا يمثل دالة لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (٠ ، ٠) يقطع الشكل البيانى فى نقطتين

الشكل [٢] :

تمثل دالة لأن الخط الرأسي عند كل نقطة على محور السينات (المجال) يقطع المنحنى فى نقطة واحدة فقط .

الشكل [٣] : لا يمثل دالة لأن يوجد خط رأسي يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة .

الاشكال [٤ ، ٥ ، ٦] : تمثل دالة

*** قواعــــد هـــامة لتعيين المجال :**

١) مجال أى دالة كثيرة الحدود مهما كان درجتها = ح .

الدالة كثيرة الحدود هى الدالة التى لا تحتوى على متغير فى المقام مثل :

د(س) = ٥ ، د(س) = ٣ س ، د(س) = ٢ س ـ ٥ ، د(س) = س^{٢} + س + ١

د(س) = س^{٣} ـ ٢ س + ٤ ، د(س) = $\frac{\text{س ـ ٣}}{\text{٢}}$

٢) مجال الدالة الكسرية = ح - أصفـــــار المقـــــام .

الدالة الكسرية هى الدالة التى يكون مقامها يحتوى على متغير

ملحوظة : مجموعة أصفار المقام هى مجموعة قيم س التى تجعل المقام = صفر

مثلا لمعرفة مجال الدالة د(س) = $\frac{\text{س ـ ٢}}{\text{س}^{٢}\text{ ـ ٩}}$ نوجد أصفار المقام

بوضع س^{٢} ـ ٩ = ٠ ∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± ٣ ∴ مجال د(س) = ح ـ { ٣ ، ـ ٣ }

حـــالة خـــاصة : ⇦ مجال الدالة الكسرية = ح فى الحالات الأتية :

*** المقام دالة ثابتة .**

*** المقام على الصورة س^{ن} + أ حيث ن ← زوجى ، أ ∈ ح$^{+}$**

*** المقام على الصورة أ س^{٢} + ب س + جـ : حيث المميز يكون سالباً .**

مثلا : مجال الدالة د(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} + ٩}$

نضع $س^{٢} + ٩ = ٠$ حيث أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٩

المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩ = -٣٦ < ٠$ (كمية سالبة)

∴ مجال د(س) = ح

٣) **مجال الدالة الجذرية :**

(يقال دالة جذرية إذا كانت قاعدة الدالة تشتمل على الجذر التربيعى)

أولا : إذا كان الجذر فى البسط : المجال هو الفترة ما تحت الجذر ≥ ٠

ثانيا : إذا كان الجذر فى المقام : المجال هو الفترة ما تحت الجذر > ٠

حالة خاصة :

الدالة د(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ $ص_{+}$ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولا : عندما ن عدد فردى فإن : مجال الدالة = ح ، ن تسمى دليل الجذر

ثانيا : عندما ن عدد زوجى فإن : مجال الدالة هو مجموعة قيم س التى تجعل هـ(س) ≥ ٠

أولاً : عندما يكون دليل الجذر فـردياً :

مثلا د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٣}$ ← مجال د (س) = ح

ثانياً : عندما يكون دليل الجذر زوجيا :

مثلا : د (س) = $\sqrt[٤]{س - ٥}$

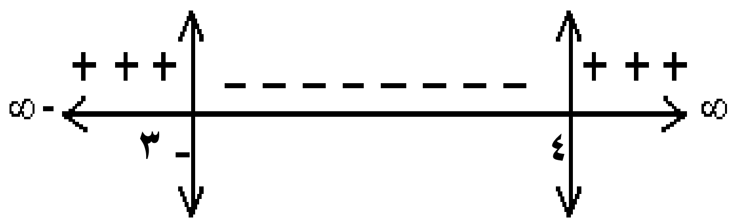
∵ س - ٥ ≥ ٠ ← س ≥ ٥ ← مجال د (س) = [٥ ، ∞ [

مثال : عين مجال د (س) = $\sqrt{س^{٢} - س - ١٢}$

الحل :

بوضع $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

(س - ٤)(س + ٣) = ٠



س ـ ٤ = ٠ | س + ٣ = ٠

س = ٤ | س = ـ ٣

∵ مجال الدالة الجذرية كمية غير سالبة (≥ ٠)

∴ مجال د (س) = [٤ ، ∞ [∪] ـ ∞ ، ـ ٣]

= ح ـ] ـ ٣ ، ٤ [

مثال : عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] $د_١$(س) = $\sqrt{س + ٤}$ [٢] $د_٢$(س) = $\sqrt{س^٢ ـ ٩}$

[٣] $د_٣$(س) = $\frac{٢ س + ٣}{س^٢ ـ ٣ س + ٢}$ [٤] $د_٤$(س) = $\frac{س ـ ٢}{س^٢ + ٩}$

[٥] $د_٥$(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ ـ ٩}}$ [٦] $د_٦$(س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$

الحل :

[١] ∵ دليل الجذر زوجى ∴ س + ٤ ≥ ٠ ⟵ س ≥ ـ ٤

∴ المجال = ح ـ] ـ ٤ ، ∞ [

[٢] ∵ دليل الجذر زوجى ∴ $س^٢$ ـ ٩ ≥ ٠ ⟵ $س^٢$ ≥ ٩ ⟵ س ≥ ± ٣

∴ المجال =] ـ ∞ ، ـ ٣] ∪ [٣ ، ∞ [= ح ـ] ـ ٣ ، ٣ [

[٣] نضع $س^٢$ ـ ٣ س + ٢ = ٠ ∴ (س ـ ٢)(س ـ ١) = ٠ ⟵ س = ٢ أ، ١

∴ المجال = ح ـ { ١ ، ٢ }

[٤] نضع $س^٢$ + ٩ = ٠ فيكون المميز كمية سالبة ∴ المجال = ح

[٥] نضع $س^٢$ ـ ٩ > ٠ ∴ (س ـ ٣)(س + ٣) = ٠ ⟵ س = ٣ ، س = ـ ٣

∵ المجال هو الفترة ما تحت الجذر > ٠ ∴ المجال = ح ـ [ـ ٣ ، ٣]

[٦] ∵ دليل الجذر فردى ∴ المجال = ح

العمليات على الـــــــدوال

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$ ، $م_٢$ فإن:

(١) $(د_١ \pm د_٢)$ (س) = $د_١$ (س) $\pm$ $د_٢$(س) ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

(٢) $(د_١ . د_٢)$ (س) = $د_١$ (س). $د_٢$(س) ، مجال $(د_١ . د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

(٣) $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢$ (س) $\neq ٠$ مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو $(م_١ \cap م_٢)$ - ف $(د_٢)$

حيث ف $(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحـظ من هذا التعريف أن:

مجموع أو فرق أو ضرب دالتين هو دالة جديدة بشرط ($م_١ \cap م_٢ \neq \varnothing$) حيث مجالها هو المجال المشترك للدالتين $د_١$ ، $د_٢$ أما مجال خارج قسمة دالتين هو المجال المشترك للدالتين مستبعدا منه أصفار المقام .

مثال : إذا كان $د_١$ (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، $د_٢$ (س) = $س^٢$ - س – ٦

* أوجد مجال ($د_١$. $د_٢$)(س) ، $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (س) ، ($د_١$ + $د_٢$) (س)

الحل :

$د_١$ (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ∴ س - ٢ ≥ ٠ ⇦ س ≥ ٢

∴ $م_١$ = مجال $د_١$ (س) = [٢ ، ∞ [

، $د_٢$ (س) = $س^٢$ - س - ٦ ⇦ $م_٢$ = مجال $د_٢$ (س) = ح

(أصفار المقام) ف ($د_٢$) : $س^٢$ - س - ٦ ⇦ (س - ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ & س = - ٢ ∴ ف ($د_٢$) = { ٣ ، - ٢ }

مجال ($د_١$. $د_٢$) س = $م_١ \cap م_٢$ = [٢ ، ∞ [∩ ح = [٢ ، ∞ [

∴ مجال $\left(\frac{\text{د}_1}{\text{د}_2}\right)$ س = م ${}_1$ ∩ م ${}_2$ - ف (د ${}_2$)

=] ٢ ، ∞ [- { ٣ ، - ٢ } =] ٢ ، ∞ [- { ٣ }

(د ${}_1$ + د ${}_2$) (س) = $\sqrt{\text{س - ٢}}$ + س ^{٢} - س – ٦

مجال (د ${}_1$ + د ${}_2$) (س) = م ${}_1$ ∩ م ${}_2$ =] ٢ ، ∞ [∩ ح =] ٢ ، ∞ [

---

* ايجاد المجال و المدى للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة :

مثال : ارسم منحنى الدالة و اذكر مجالها و مداها

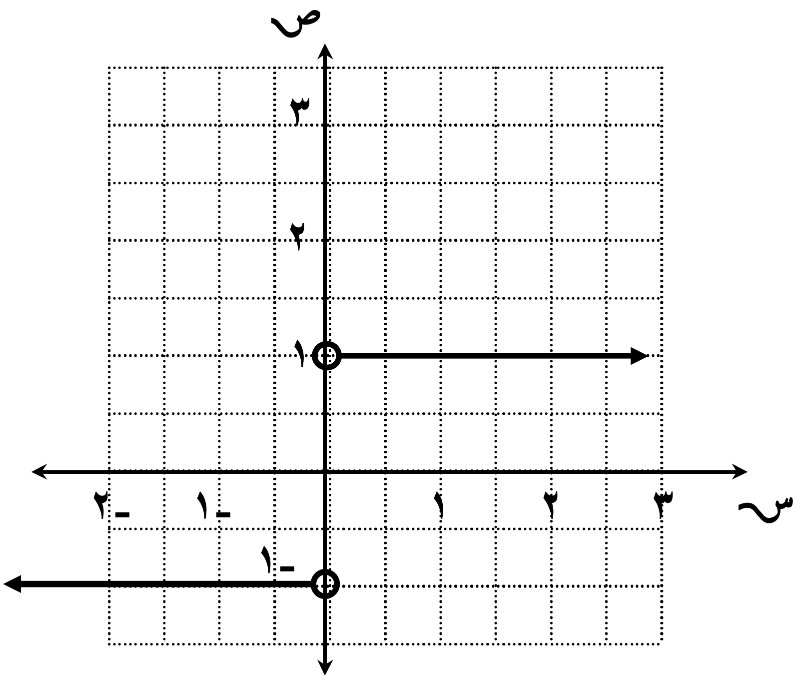
(أ) د(س) = { ـ ١ س < ٠ ، ١ س > ٠ }

(ب) د(س) = { س + ٢ س ⩾ ٠ ، س – ٢ س < ٠ }

الحل :

(أ) عند س < ٠ دالة ثابتة تمثل شعاع يوازى محور السينات و يبدأ من (٠ ، - ١)

عند س > ٠ دالة ثابتة تمثل شعاع يوازى محور السينات و يبدأ من (٠ ، ١)



المجال = ح ـ { ٠ }

المدى = { ١ ، - ١ }

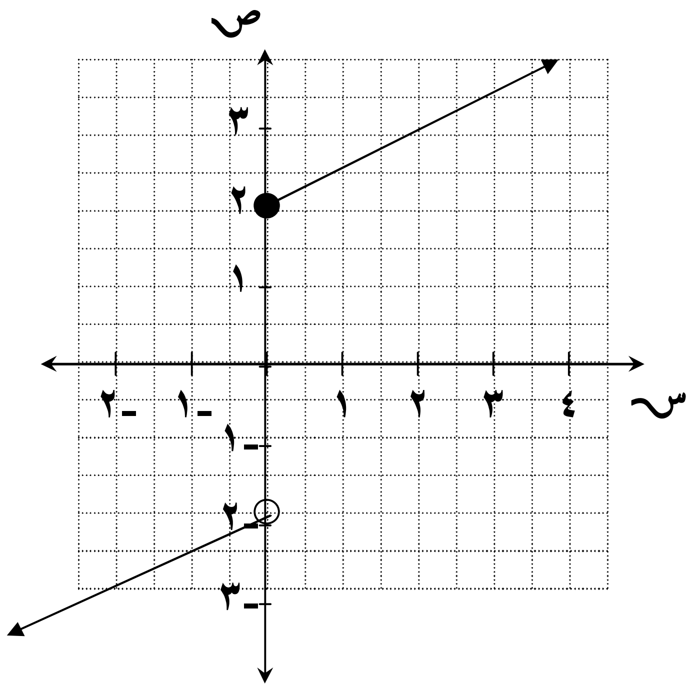
(ب) نرسم جدول لكل قاعدة

س > ٠

س	٠	ـ ١	ـ ٢
د(س)	ـ ٢	ـ ٣	ـ ٤

س ⩽ ٠

س	٠	١	٢
د(س)	٢	٣	٤



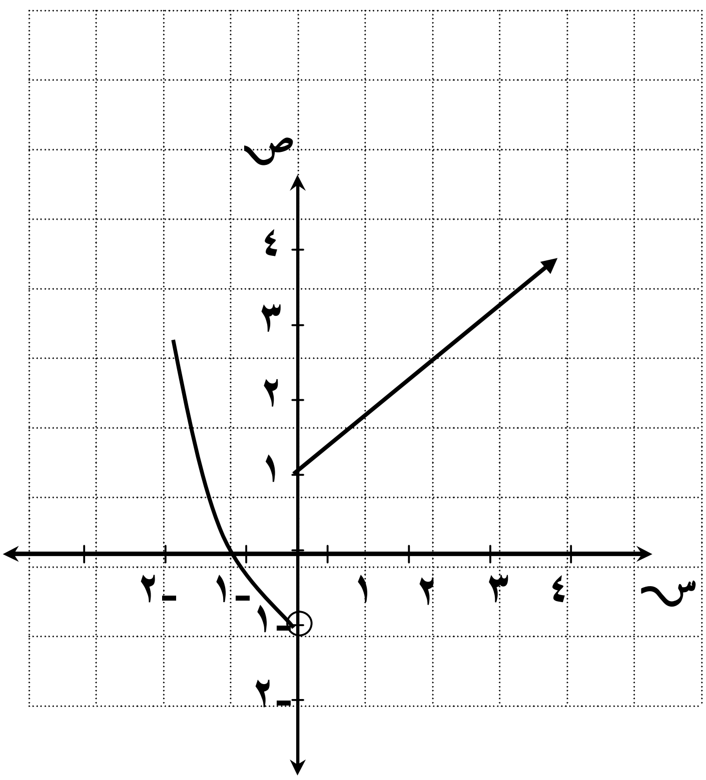
المجال = ح ، المدى = ح ـ] ـ ٢ ، ٢ [

مثال : إذا كانت د(س) = { س^{٢} ـ ١ ـ ٢ ⩽ س > ٠ ؛ س + ١ س ⩽ ٠ }

ارسم الشكل البيانى للدالة و من الرسم استنتج مجال و مدى الدالة

الحل :

	س^{٢} ـ ١			س + ١		
س	٢ـ	١ـ	٠	٠	١	٢
د(س)	٣	٠	١ـ	١	٢	٣

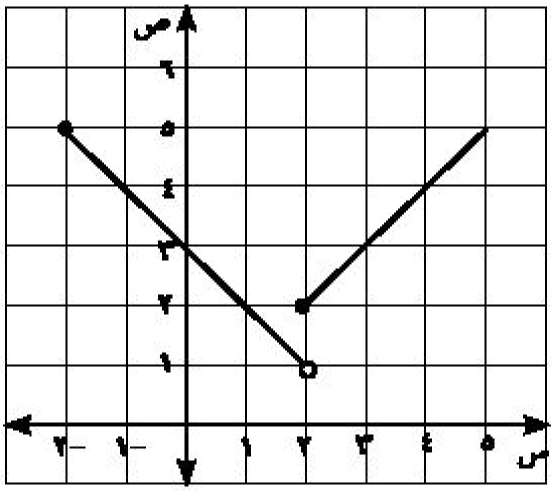


من الرسم : مجال الدالة = [ـ ٢ ، ∞ [

المدى = [ـ١ ، ∞ [

مثال : إذا كانت د(س) = { ٣ – س عندما -٢ ⩽ س < ٢ ، س عندما ٢ ⩽ س ⩽ ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم مجال الدالة و مداها



الحل :

المجال = [-٢ ، ٥] ، المدى = [١ ، ٥]

مثال : إذا كانت الدالة د : [-٢ ، ٤] ⟵ ح حيث

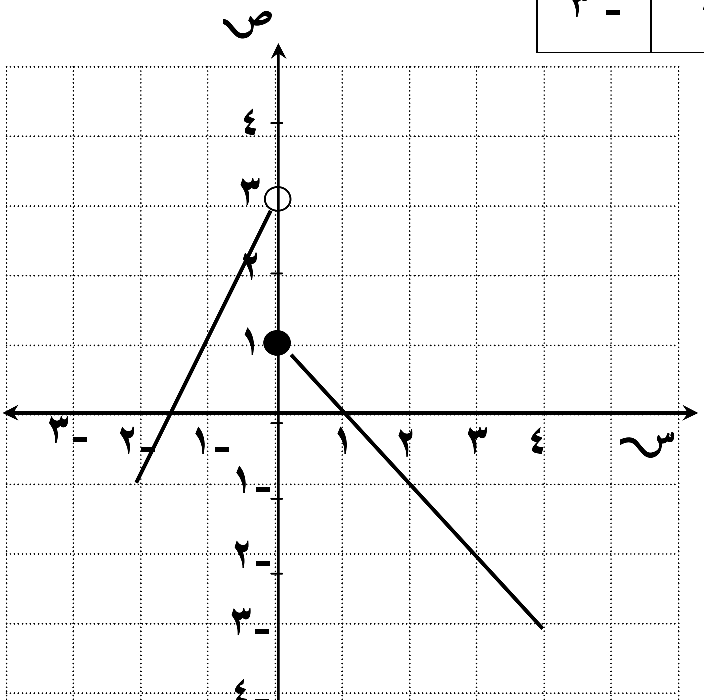
د(س) = { ٢ س + ٣ عندما -٢ ⩽ س < ٠ ، ١ – س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤

ارسم الشكل البيانى للدالة د و من الرسم استنتج مجال و مدى الدالة

الحل :

س	-٢	-١	٠	٠	١	٤
ص	-١	١	٣	١	٠	-٣

(-٢ ⩽ س < ٠ ، ٠ ⩽ س ⩽ ٤)

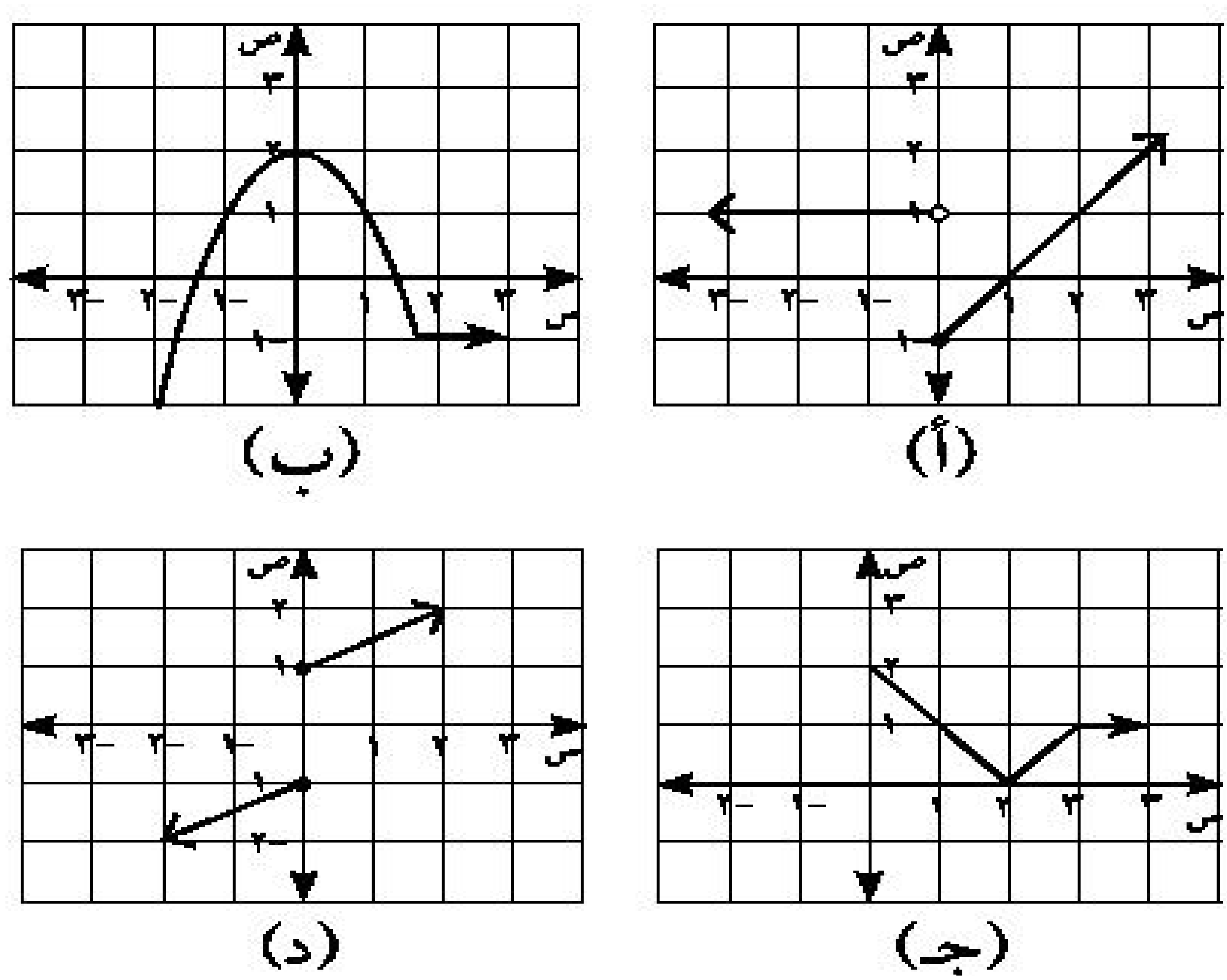


المجال = [-٢ ، ٤]

المدى =] -٣ ، ٣ [

تمارين (١)

[١] ايا من العلاقات الآتية لا تمثل دالة :



[٢] جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى ما عدا العلاقة :

(١) ص = ٢ س ـ ٣ (٢) ص = $س^{٢}$ ـ ٤ (٣) س = $ص^{٢}$ ـ ٢ (٤) ص = حا س

---

[٣] عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الاتية :

(١) د(س) = $س^{٢}$ ـ ٢ س (٢) د(س) = ـ ٥ (٣) د(س) = $\sqrt{٢ س ـ ٣}$

---

(٤) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$ (٥) $\text{د(س)} = \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$ (٦) $\text{د(س)} = \dfrac{٣\,\text{س} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$

(٧) $\text{د(س)} = \begin{cases} -٢ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٤ - \text{س} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \end{cases}$ (٨) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}$

(٩) $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{\text{س}^{٢} - ١}$ (١٠) $\text{د(س)} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

[٤] مثل الدوال الاتية بيانيا و عين مداها :

(١) إذا كانت د : [- ١ ، ٥] ⟵ ح ، $\text{د(س)} = \begin{cases} ٤ - \text{س} & \text{عندما } -١ \leqslant \text{س} < ٢ \\ \text{س} & \text{عندما } ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$

فأوجد كلا من د(-١) ، د(٠) ، د(١) ، د(٢) ، د(٣) ، د(٤) ، د(٥)
ثم ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم مداها .

(٢) إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢\,\text{س} & \text{عندما س} \geqslant ٢ \\ \text{س} + ٢ & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$

فاوجد كلا من د(٢) ، د(٣) ، د(٤) ، د(١) ، د(٠) ، د(- ١) ، د(- ٤)
ثم ارسم الشكل البيانى للدالة و استنتج من الرسم مداها .

(٣) إذا كانت د : [- ٣ ، ٣] ⟵ ح حيث

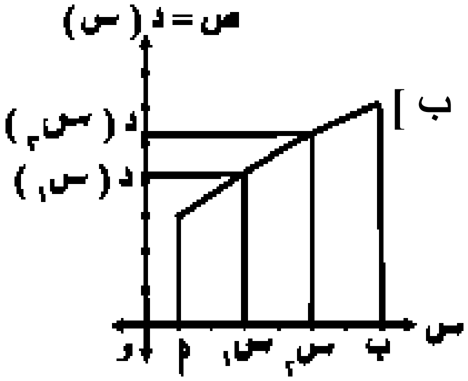
$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما } -٣ \leqslant \text{س} < ٠ \\ \text{س} + ٢ & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٣ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة و من الرسم استنتج مدى هذه الدالة

إطراد الدوال :

(اطـــــــراد الـدالــــة)

تزايدية تناقصية ثابتة

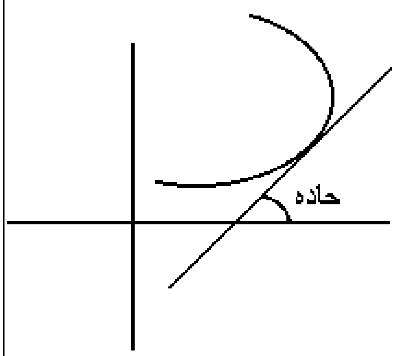


١ - (الدالة التزايدية) ⇦ يقال للدالة أنها تزايدية فى الفترة [ﻫ ، ب]

إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∈ [ﻫ ، ب]

يتحقق الشرط الآتى :

إذا كان س ١ > س ٢ ⇦ د (س ١) > د (س ٢)

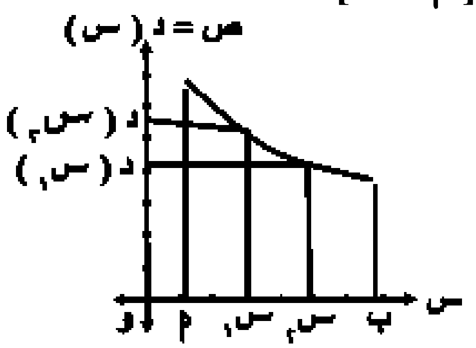


⇦ وبصفة عامـــة : د (س) تكون تزايدية إذا كانت :

قيمة الدالة تتزايد بإزدياد قيمة س .

⇦ وبطريقة أخرى : د (س) تكون تزايدية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٢ - (الدالة التناقصية) ⇦ يقال للدالة أنها تناقصية فى الفترة [ﻫ ، ب]



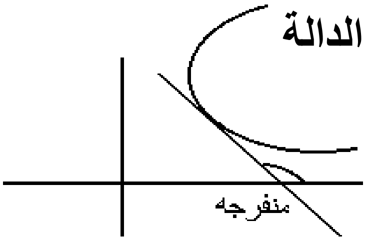
إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∈ [ﻫ ، ب]

يتحقق الشرط الآتى :

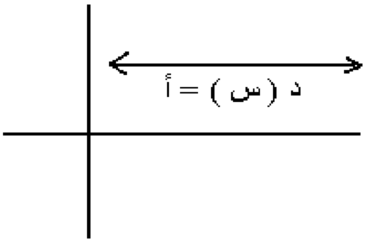
إذا كان س ١ > س ٢ ⇦ د (س ١) < د (س ٢)

وبصفة عامـــة : د (س) تكون تناقصية إذا كانت :قيمة الدالة تتناقص بإزدياد قيمة س .

وبطريقة أخرى : د (س) تكون تناقصية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



٣- (الدالة الثابته) ⇦ يقال للدالة أنها ثابته فى الفترة [م ، ب]

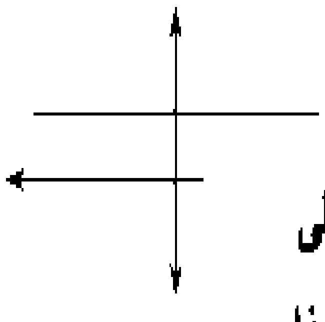


إذا كان لكل س $_{١}$ ، س $_{٢}$ ∋ [م ، ب]

يتحقق الشرط الآتى : إذا كان س $_{١}$ > س $_{٢}$ ⇦ د (س $_{١}$) = د (س $_{٢}$) = م

وبصفة عامـــة : د (س) تكون ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما كانت قيمة س .

يقصد باطراد الدوال معرفة الفترات التى تكون عندها الدالة : متزايدة أو متناقصة أو ثابتة



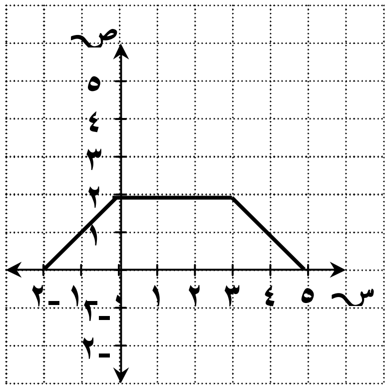
(١) الدالة تكون متزايدة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يصعد المنحنى لأعلى

(٢) الدالة تكون متناقصة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يهبط المنحنى لأسفل

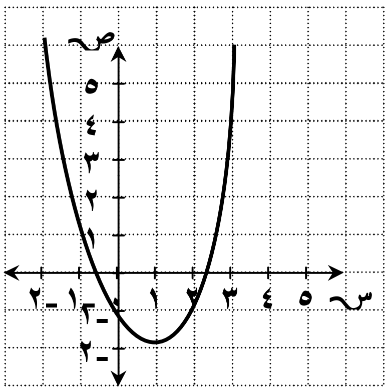
(٣) الدالة تكون ثابتة إذا كان منحنى الدالة خط مستقيم يوازى محور السينات .

تذكرأن: المجال و فترات الاطراد تقرأ على محور السينات أما المدى يقرأ على محور الصادات

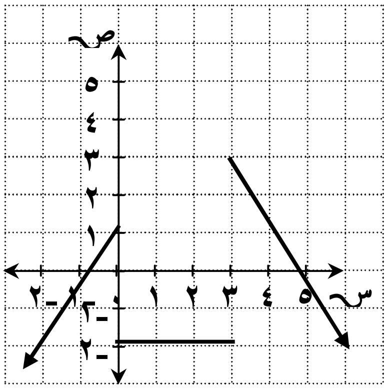
مثال : ابحث اطراد كلا من الدوال الاتية مع ذكر المدى :



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

الحل :

فى الشكل (١) : المدى = [٠ ، ٢]

الاطراد : الدالة متزايدة فى [- ٢ ، ٠] ، ثابتة فى [٠ ، ٣] ، متناقصة فى [٣ ، ٥]

فى الشكل (٢) : المدى = [- ٢ ، ∞ [

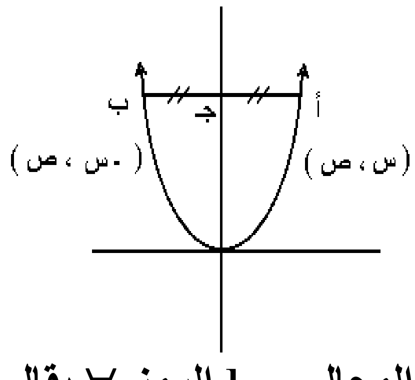
الاطراد : متزايدة فى [١ ، ∞ [، متناقصة فى] - ∞ ، ١]

فى الشكل (٣) : المدى =] – ∞ ، ٣]

الاطراد : الدالة متزايدة فى] - ∞ ، ٠] ، متناقصة فى [٣ ، ∞ [، ثابتة فى [٠ ، ٣]

*** نوع الدالـــــة :**

أولا : الدالة الزوجية :



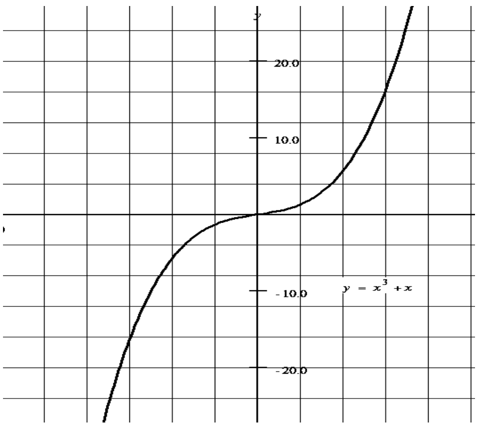
جبريا : الدالة د : س ⟵ ص تكون زوجية

إذا كانت : د (- س) = د (س) ∀ س ، - س ∋ المجال . [الرمز ∀ يقال لكل]

بيانيا : تكون الدالة زوجية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول الصادات .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) ∋ منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، ص) ∋ منحنى الدالة .

ثانياً : الدالة الفردية :



جبريا : الدالة د : س ⟵ ص تكون فردية

إذا كانت : د (ـ س) = ـ د (س)

∀ س ، ـ س ∋ المجال .

بيانيا :

تكون الدالة فردية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول نقطة الأصل .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (ـ س ، ـ ص) تقع أيضا على منحنى الدالة .

أولاً : بحث نوع الدالة جبرياً

خطوات البحث :

(١) نوجد د (− س) وذلك يتم باستبدال كل (س) بـ (− س) فى الدالة الأصلية

(٢) نتعامل مع الأقواس ونفكها

(٣) نقارن بين الدالة الناتجة والدالة الأصلية ونحكم على نوع الدالة حسب الجدول الموضح سابقاً .

ملاحظات هامة عند بحث نوع الدالة جبرياً :

(١) $(-س)^{\text{عدد زوجى}} = س^{\text{نفس العدد الزوجى}}$ ، $(-س)^{\text{عدد فردى}} = -س^{\text{نفس العدد الفردى}}$

(٢) الزاوية السالبة (− س) تعامل معاملة الربع الرابع فى إشارة الدوال المثلثية

أى : جا (− س) = − جا س ، ظا (− س) = − ظا س ، جتا (− س) = جتا س

(٣) د (س) + د (ـ س) = ٠

مثال : ابحث نوع الدوال الآتية جبريا :

$$(١)\ د(س) = \frac{س^{٣}\ حا\ ٣\ س}{١ + س^{٤}} \qquad (٢)\ د(س) = \frac{س\ |س|}{١ + س\ حا\ س}$$

$$(٣)\ د(س) = \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} \qquad (٤)\ د(س) = \begin{cases} س - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ < س \\ -س - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ > س \end{cases}$$

الحل:

$$(١)\ د(-س) = \frac{(-س)^{٣}\ حا -٣\ س}{١ + (-س)^{٤}} = \frac{-س^{٣} \times -\ حا٣\ س}{١ + س^{٤}} = \frac{س^{٣}\ حا\ ٣\ س}{١ + س^{٤}}$$

$$= د(س) \quad \therefore \text{ الدالة زوجية}$$

$$(٢)\ د(-س) = \frac{-س\ |-س|}{١ + (-س)\ حا\ (-س)} = \frac{-س\ |س|}{١ + س\ حا\ س} = -د(س) \quad \therefore \text{ فردية}$$

$$(٣)\ د(-س) = \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٥} = \left(\frac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right)^{٥} + \left(\frac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right)^{٥}$$

$$= \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥} = د(س) \quad \therefore \text{ الدالة زوجية}$$

$$(٤)\ د(-س) = \begin{cases} -س - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ < -س \\ -(-س) - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ > -س \end{cases} = \begin{cases} -س - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ < س \\ س - ٣ & \longleftarrow \quad ٠ < س \end{cases} = د(س)$$

$\therefore$ **الدالة زوجية**

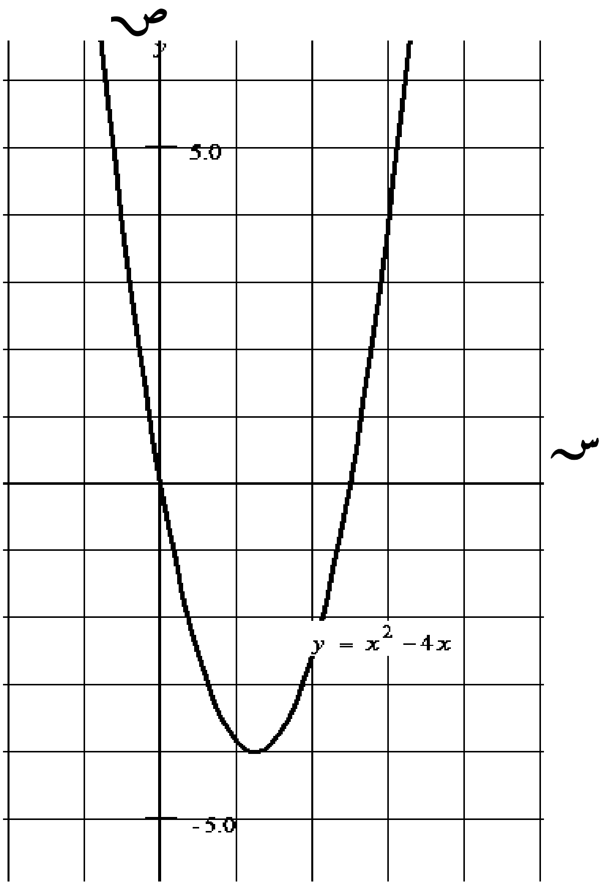
مثال : باستخدام البرامج الرسومية مثل الدوال الآتية و ابحث أى من الدوال زوجية أو فردية أو غير ذلك ثم تحقق من اجابتك جبرياً .

(١) د(س) = س^{٢} – ٤ س (٢) د(س) = س^{٣} + س (٣) د(س) = س حا س

الحل :

(١) نكون الجدول : د(س) = س^{٢} – ٤ س

س	ـ ١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	ـ ٣	ـ ٤	ـ ٣



الشكل البيانى ليس متماثلا حول محور الصادات
و ليس متماثلا حول نقطة الأصل

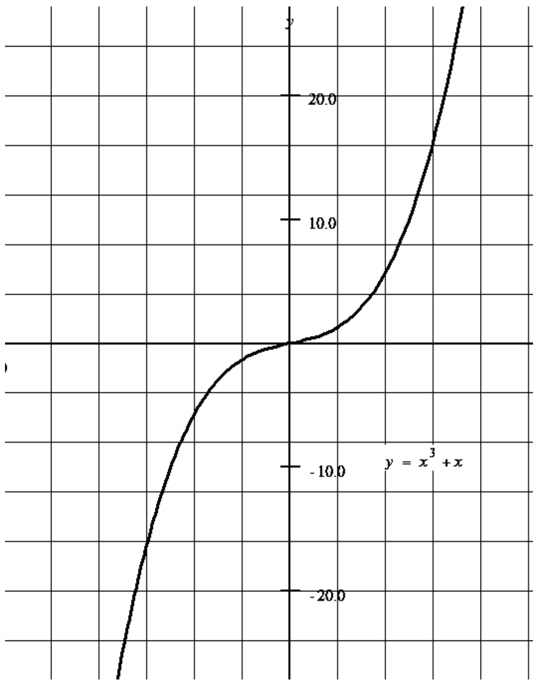
د(ـ س) = (ـ س)^{٢} – ٤ × (ـ س)

= س^{٢} + ٤ س ≠ ـ د(س)

∴ الدالة لا زوجية و لا فردية

(٢) د(س) = س^{٣} + س

س	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢
د(س)	ـ١٠	ـ ٢	٠	٢	١٠



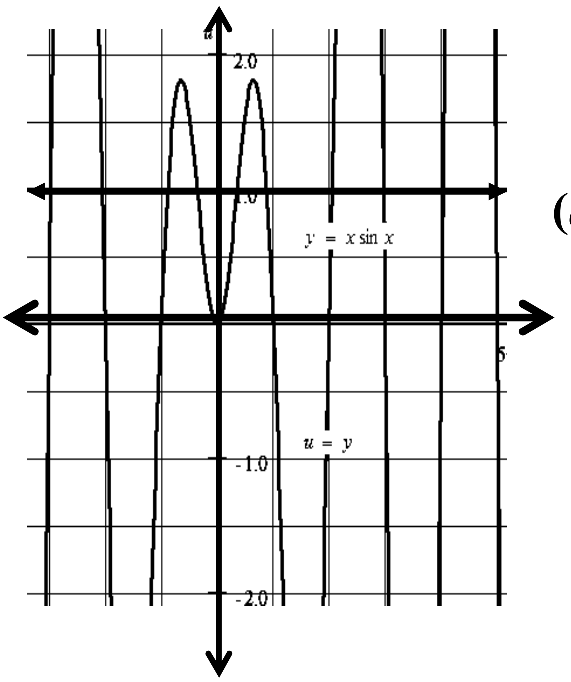
الشكل البيانى متماثل حول نقطة الأصل

، د(ـ س) = (ـ س)^{٣} + (ـ س)

= ـ س^{٣} – س = ـ (س^{٣} + س)

= ـ د(س)

∴ الدالة فردية

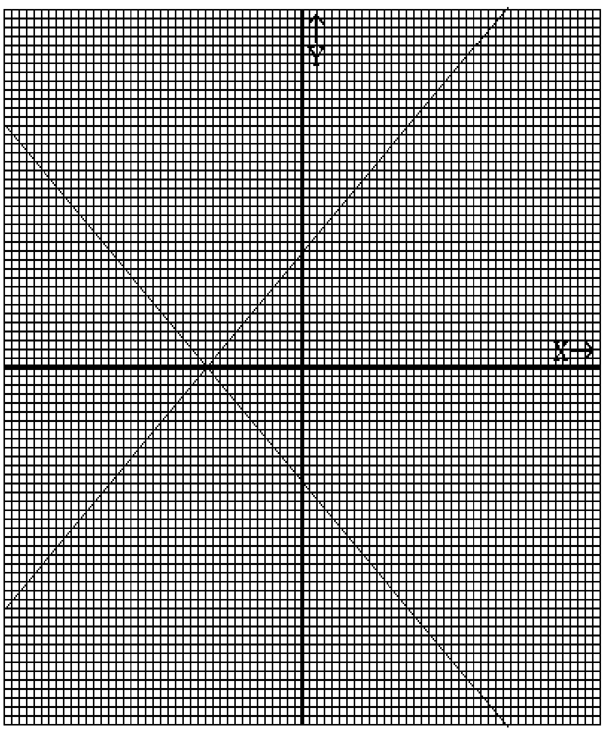


(٣) د(س) = س حا س
الشكل البيانى متماثلا حول محور الصادات
∵ د(- س) = - س حا (- س) = س حا س = د(س)
∴ الدالة زوجية .

مثال : مثل بيانيا الدالة د حيث

د(س) = { س + ٢ ⟵ س ⩾ - ٢
　　　　{ ـ س ـ ٢ ⟵ س < - ٢

ثم بين هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك و تحقق من ذلك جبريا .



الحل :

	س ⩾ ـ ٢			س > ـ ٢		
س	ـ ٢	ـ ١	٠	ـ ٢	ـ ١	ـ ٣
ص	صفر	١	٢	٠	ـ ١	١

الشكل البيانى متماثلا حول محور السينات

∵ د(- س) = { - س + ٢ ⟵ - س ⩾ - ٢
　　　　　　{ س ـ ٢ ⟵ - س > - ٢

= { - س + ٢ ⟵ - س ⩾ ٢
　{ س ـ ٢ ⟵ س > - ٢

≠ - د(س) ∴ الدالة ليست زوجية و لا فردية

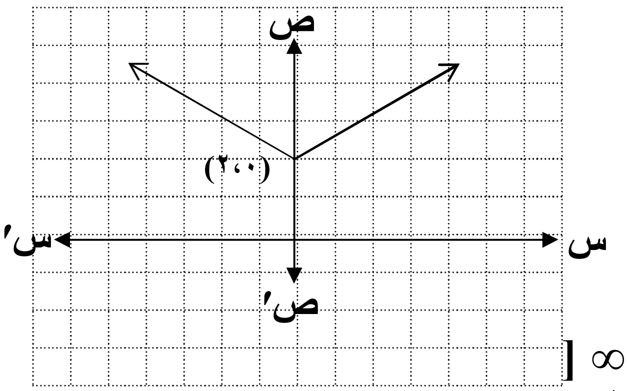
مثال : ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونـها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

$$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & \leftarrow \quad س \geqslant ٠ \\ -\,س + ٣ & \leftarrow \quad س < ٠ \end{cases}$$

الحل :

س	٠	١
ص	٢	٣

س	٠	١-
ص	٢	٣



المجال = ح ، المدى = [٢ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]- ∞ ، ٠[، متزايدة فى [٠ ، ∞ [

وهى دالة زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

تدريب :

مثال : ابحث نوع الدوال الآتية من حيث زوجية أو فردية أو غير ذلك . (جبرياً)

[١] $د(س) = ٢ - س^{٢}$　　[٢] $د(س) = ٤ \sqrt{س}$　　[٣] $د(س) = \frac{س^{٣} \text{ حا } ٣ س}{١ + س^{٤}}$

[٤] $د(س) = \begin{cases} س - ٣ & \leftarrow \quad س > ٠ \\ -\,س - ٣ & \leftarrow \quad س < ٠ \end{cases}$　　[٥] $د(س) = س^{٣} + \text{حتا } س$

[٦] $د(س) = \sqrt{س^{٣} + ٦}$　　[٧] $د(س) = \begin{cases} س - ١ & \leftarrow \quad س \geqslant ٠ \\ ٧ س & \leftarrow \quad س < ٠ \end{cases}$

[٨] $د(س) = \begin{cases} ٢س & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ -\,٢س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$　　[٩] $د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ -\,س + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

[١٠] $د(س) = س^{٣} \text{ حتا } س$　　[١١] $د(س) = \frac{\text{حا } س - \text{ظا } س}{س^{٣} - ٣ س}$　　[١٢] $د(س) = س^{٣} + \text{حتا } س$

دوال كثيرات الحدود

نعلم أن :

دوال كثيرات الحدود هى دوال قاعدتها على الصورة :

د (س) = $أ_٠$ + $أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + $أ_٣$ $س^٣$ + ٠٠٠٠ + $أ_ن$ $س^ن$

حيث : $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ٠٠٠٠ ، $أ_ن$ ثوابت ، $أ_ن$ ≠ صفر

وكل من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح " ما لم يذكر خلاف ذلك "

، ولذلك تسمى كثيرة حدود حقيقية من الدرجة ن

، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة " أس " يأخذها المتغير المستقل س

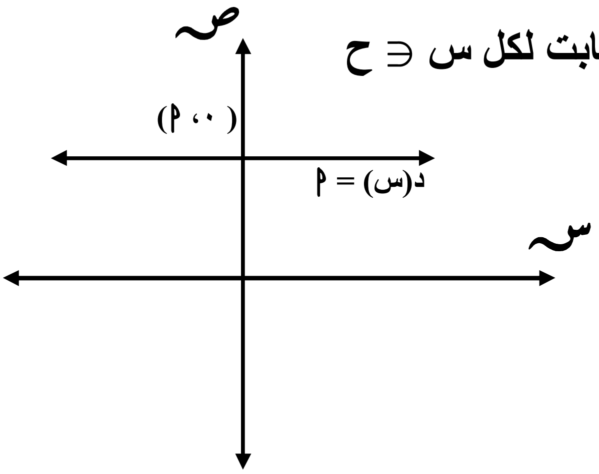
، وحيث أن مجال كثيرات الحدود هو ح لذلك فإن الأشكال البيانية لهذه الدوال تكون خطوط متصلة سواء كانت مستقيمة أو منحنية

ملاحظة :

إذا كان مجال أى دالة هو ط أو ص أو ن فإن الشكل البيانى لها هو نقط منفصلة

أولا : الدالة الثابتة

الصورة العامة للدالة الثابتة هى د(س) = أ حيث أ ثابت لكل س ∈ ح



و تمثل بيانيا بمستقيم يوازى محور السينات

و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، أ)

كما فى الشكل الموضح :

مجالها = ح ، مداها = { أ } ، الدالة زوجية

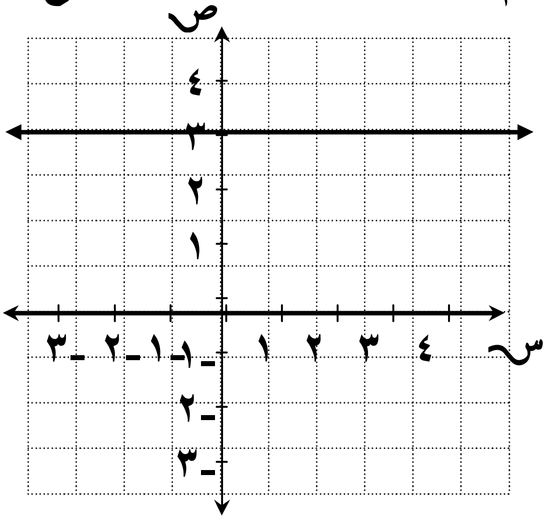
و هى الدالة الوحيدة التى مداها نقطة أو مجموعة من النقاط

ملحوظة : إذا كانت أ موجبة فإن المستقيم يكون أعلى محور السينات

، و إذا كانت أ سالبة فإن المستقيم يكون أسفل محور السينات

مثال : ارسم الدالة د حيث د(س) = ٣ و من الرسم عين المدى و الاطراد و النوع

الحل :



المدى = { ٣ }

ثابتة على مجالها

زوجية لتماثلها حول محور الصادات

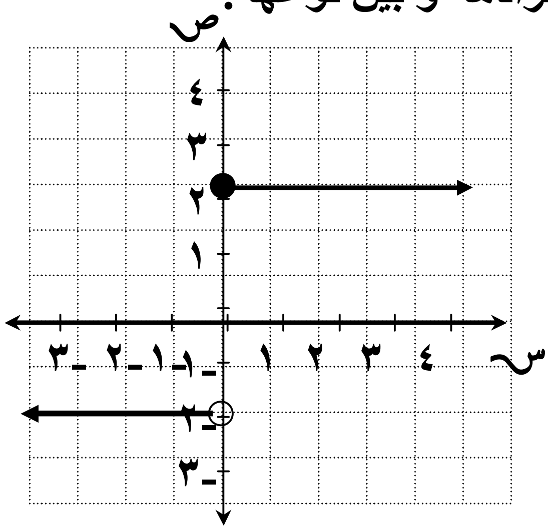
مثال : ارسم الدالة د(س) =

-٢ عندما س < ٠

٢ عندما س ≥ ٠

و من الرسم أوجد مدى الدالة و ابحث اطرادها و بين نوعها .

الحل :



هذه الدالة معرفة على فترتين

مدى الدالة = { ٢ ، -٢ }

الدالة ثابتة على الفترتين

[٠ ، ∞ [،] -∞ ، ٠ [

الدالة ليست فردية و ليست زوجية

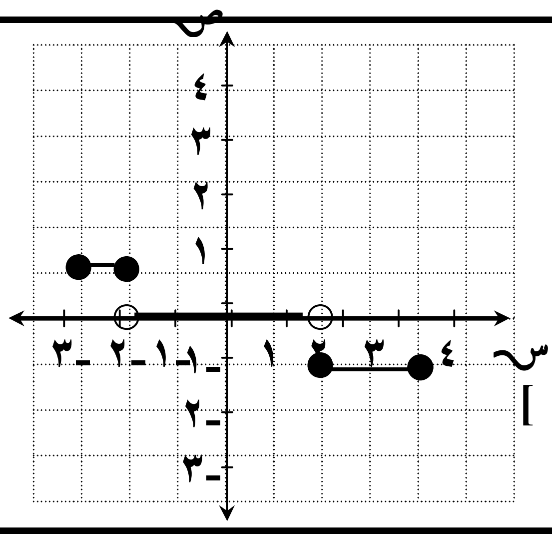
مثال : مثل بيانيا الدالة د : [-٣ ، ٤] ⟵ ح

حيث د(س) =

١ ، س ≤ -٢

صفر ، -٢ < س < ٢

-١ ، س ≥ ٢



الحل :

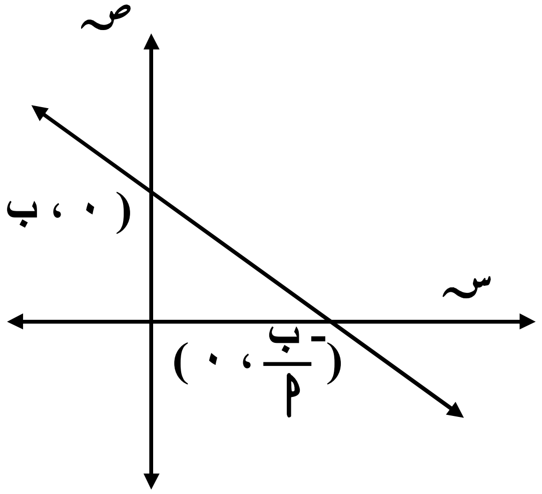
الشكل المقابل تمثيل الدالة بيانيا على المجال [-٣ ، ٤]

مدى د = { ١ ، ٠ ، -١ }

الدالة ثابتة على كل من الفترات الثلاث [-٣ ، -٢] ،] – ٢ ، ٢ [، [٢ ، ٤]
من تماثل الشكل البيانى للدالة بالنسبة لنقطة الاصل نستنتج أن الدالة فردية

ثانيا : دالة الدرجة الأولى أو (الدالة الخطية

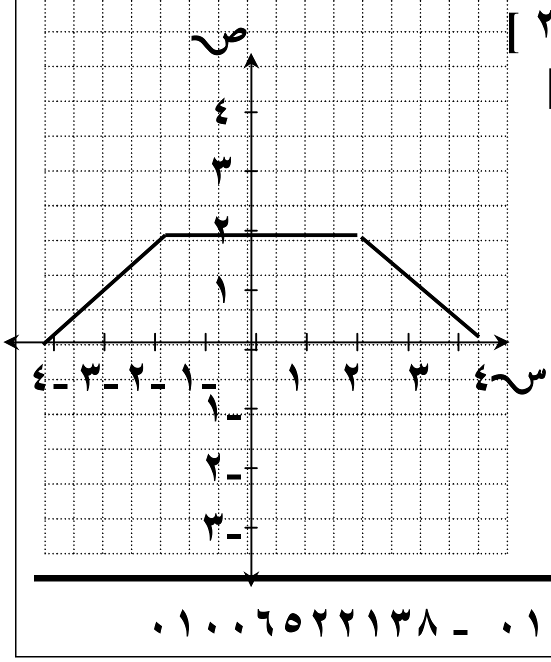
الصورة العامة للدالة الخطية هى د(س) = ٲ س + ب لكل س ∈ ح ، ٲ ≠ ٠
و تمثل بخط مستقيم ميله = ٲ ، ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) و يقطع محور السينات فى النقطة ($\frac{-ب}{ٲ}$ ، ٠)



مجالها = ح ، مداها = ح
اطرادها :
الدالة تزايدية عندما ٲ > ٠ (موجبة)
مثلا : الدالة د(س) = ٣ س – ٢ متزايدة
الدالة تناقصية عندما ٲ < ٠ (سالبة)
مثلا : الدالة د(س) = ٢ – ٣ س متناقصة
نوعها :
الدالة ليست زوجية و ليست فردية بصفة عامة و لكنها فردية عندما ب = ٠

مثال :
ارسم الدالة د(س) =
- س + ٤ ، س ∈ [- ٤ ، - ٢]
- ٢ ، س ∈] – ٢ ، ٢ [
- ٤ – س ، س ∈ [٠ ، ٢]

و من الرسم استنتج مدى الدالة و اطرادها و نوعها .



الحل:
المجال = [- ٤ ، ٤] ، المدى = [٠ ، ٢]
الدالة متزايدة فى [- ٤ ، - ٢] ، ثابتة فى] – ٢ ، ٢ [
، تناقصية فى] ٢ ، ٤]
الدالة زوجية لانها متماثلة حول محور الصادات

مثال : ارسم المنحنى للدالة د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{، س} \geqslant ٠ \\ \text{س} - ٢ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

و من الرسم استنتج مدى الدالة و اطرادها و نوعها

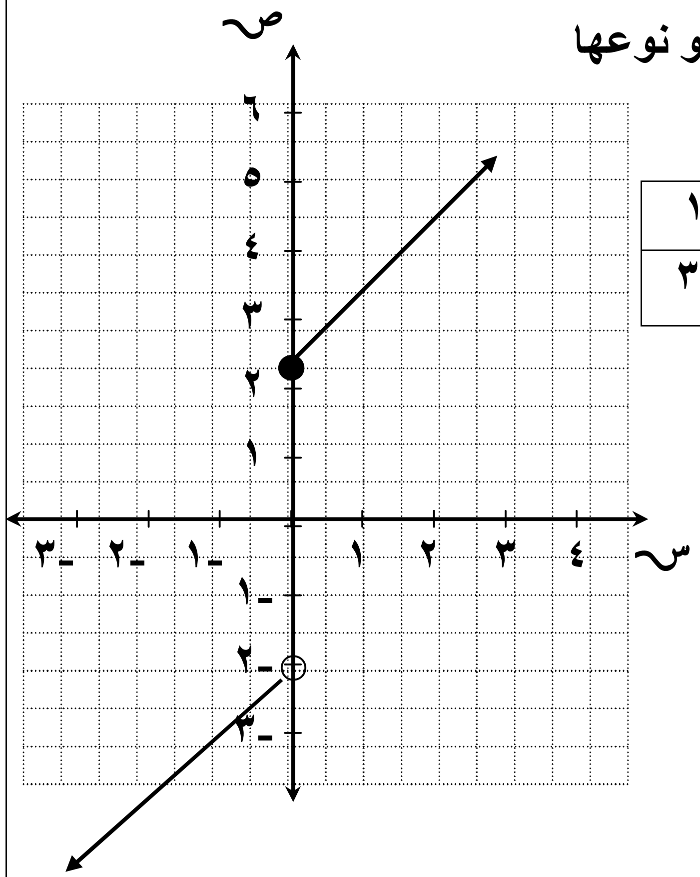
الحل :

س $\geqslant$ ٠

س	٠	١
ص	٢	٣

س < ٠

س	٠	ـ١
ص	ـ ٢	ـ ٣



مجال الدالة = ح

مدى الدالة =] - ∞ ، - ٢ [∪] ٢ ، ∞ [

أو ح ـ [- ٢ ، ٢]

الدالة تزايدية على مجالها

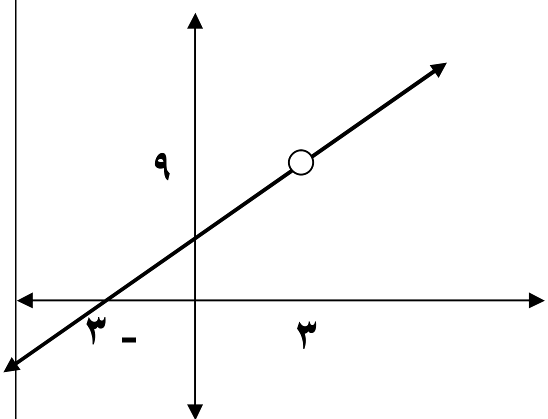
الدالة ليست فردية و ليست زوجية

مثال : مثل بيانيا الدالة د حيث د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣}$ و من الرسم أوجد مدى الدالة و ابحث اطرادها و بين نوعها من حيث كونـها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

الحل :

هذه الدالة ليست من الدرجة الاولى و لكن يمكن تحويلها الى دالة من الدرجة الاولى كما يأتى :

د(س) = $\frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)}$ = س+ ٣ ، س ≠ ٣



لذلك يتم تمثيلها بيانيا بخط مستقيم به ثقب عند س = ٣

من الرسم نلاحظ أن :

مجال دالة = ح ـ { ٣ }

مدى الدالة = ح ـ { ٩ }

الدالة تزايدية على مجالها ح ـ { ٣ }

تمارين (٢) على الدالة الثابتة و الخطية

مثل بيانيا كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

[١] د(س) = س **[٢] د(س) = ٢ س + ٣**

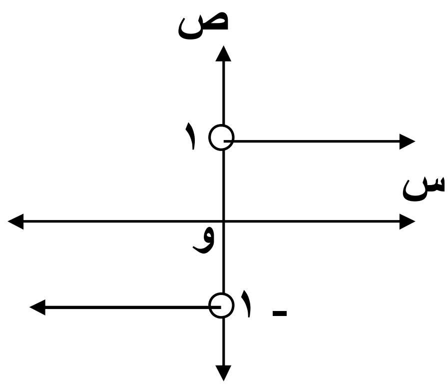
[٣] $\text{د(س)} = \dfrac{\text{٣ س}^{٢} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$ **[٤]** $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

[٥] $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢ & \text{، } ٠ \geqslant \text{س} \\ -٢ & \text{، } ٠ < \text{س} \end{cases}$ **[٦]** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} & \text{، } ٠ \leqslant \text{س} \\ -\text{س} & \text{، } ٠ > \text{س} \end{cases}$

[٧] $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٣ س} & \text{، س} \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & \text{، س} \in]٢ ، ٤] \\ \text{س} + ٢ & \text{، س} \in [٤ ، ٦] \end{cases}$ **[٨]** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{، } ١ > \text{س} \\ ٢ & \text{، } ٣ > \text{س} > ١ \\ \text{س} & \text{، } ٠ \leqslant \text{س} \end{cases}$

[٩] $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{، } ٠ \leq \text{س} \\ -\text{س} + ٢ & \text{، } ٠ > \text{س} \end{cases}$ **[١٠]** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٣ & \text{، } ٠ < \text{س} \\ ٣ & \text{، } ٠ \geq \text{س} \end{cases}$

مثال : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :



(١) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل : هو ....

(أ) { ١ } (ب) { ١ ، - ١ } (جـ) { - ١ } (د) ح

(٢) الدالة د : د(س) = ٣ – س تكون ....

(أ) تزايدية على ح **(ب) تناقصية على ح**

(جـ) تزايدية فى] ٣ ، ∞ [**(د) تناقصية فى] ٣ ، ∞ [**

ثالثا: دالــة المقـياس (القيمة المطلقة)

* (<u>مفهوم المقياس</u>) ⇦ هو عدد حقيقى غير سالب (≥ ٠)

* (<u>المقياس العـدد</u>) ⇦ هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد . | س | = $\sqrt{س^{٢}}$

مثلا: | - ٥ | = $\sqrt{٢٥}$ ، | ٣ | = $\sqrt{٩}$ = ٣ ، | ٠ | = ٠ ، | $\frac{١}{٢}$ | = $\frac{١}{٢}$

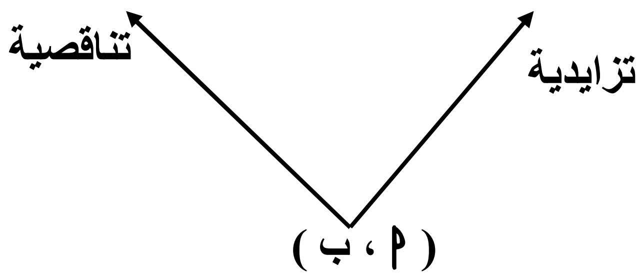
* <u>رسم دالة المقياس</u> : (خواص دالة المقياس)

الصورة العامة هى : د(س) = ك | س - أ | + ب ، ك = ± ١

تمثل بيانيا بشعاعين من النقطة (أ ، ب) هى نقطة رأس المنحنى (أ ، ب)

أ = الازاحة السينية ، ب = الازاحة الصادية ، معادلة محور التماثل هو س = أ

ك > ٠ (موجبة)

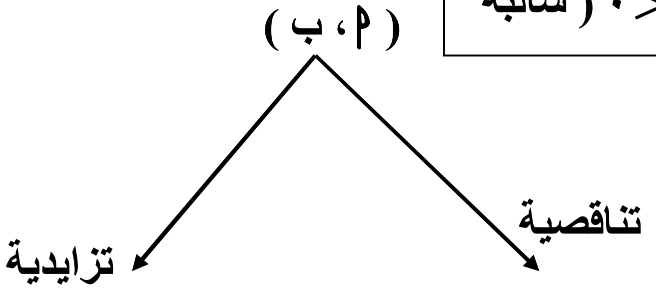


مدى الدالة = [ب ، ∞ [

الدالة تزايدية فى [أ ، ∞ [

الدالة تناقصية فى] - ∞ ، أ]

ك < ٠ (سالبة)



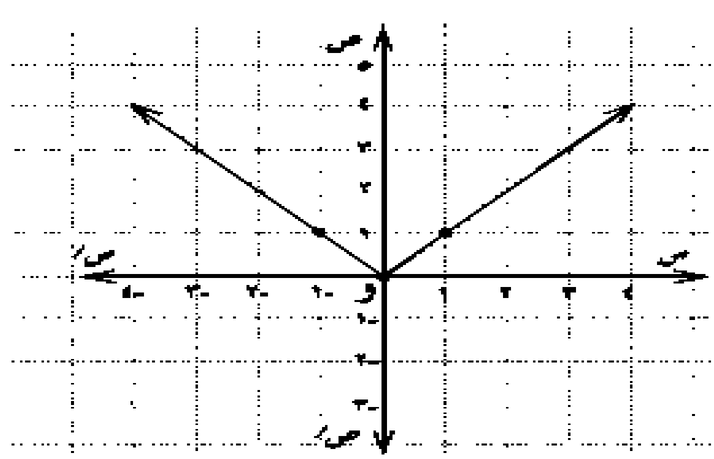
مدى الدالة =] - ∞ ، ب]

الدالة تزايدية فى] - ∞ ، أ]

الدالة تناقصية فى [أ ، ∞ [

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س | ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها .

الحل



اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى ت/ ٠١١٥٤٨٠٢٨١١ - ٠١٠٠٦٥٢٢١٣٨

تمثل بيانياً بشعاعين من النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٠ ، ٠)

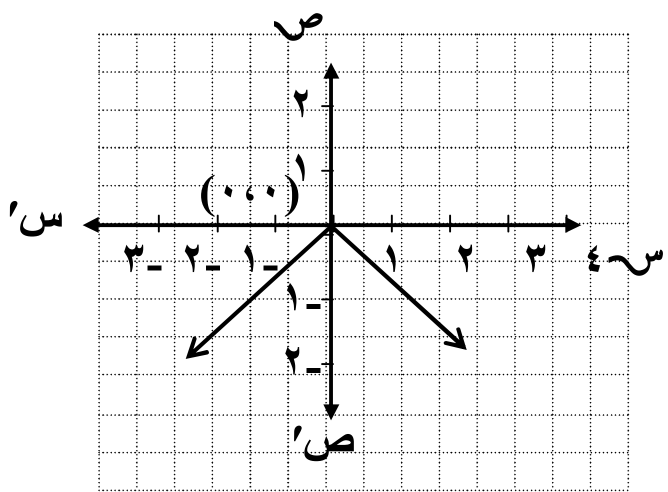
مجال الدالة = ح مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

] – ∞ ، ٠] تناقصية [٠، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات .

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س | مع ذكر المجال والمدى

ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل:

رأس المنحنى (٠ ، ٠)

المجال ح

المدى =]- ∞ ، ٠]

د متزايدة فى]- ∞ ، ٠]

د متناقصة فى [٠ ، ∞[

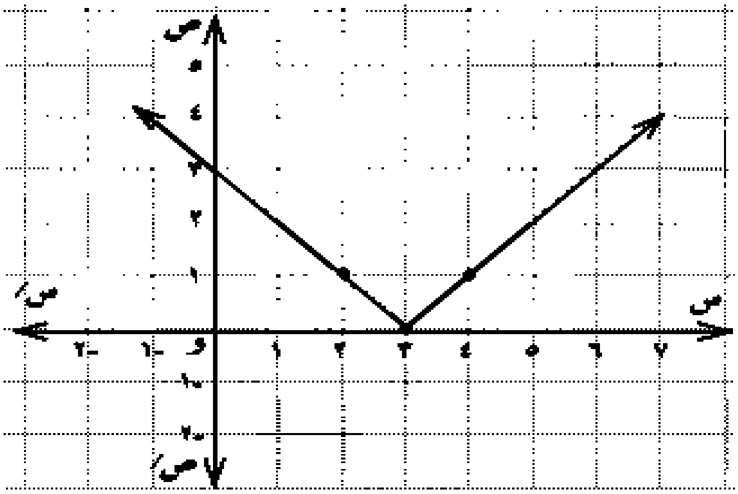
د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

تمثل بيانيا شعاعين بدايتهما نقطة الأصل فى الربع الثالث و الرابع و ينصفان الزاوية بين المحورين

ارسم منحنى الدالة د(س) = |س – ٣ | ومن الرسم

استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها

الحل



تمثل بيانياً بشعاعين

من النقطة (٣ ، ٠)

مجال الدالة = ح

مدى الدالة = [٠ ، ∞ [

] – ∞ ، ٣] تناقصية

[٣ ، ∞ [تزايدية

الدالة ليست زوجية وليست فردية

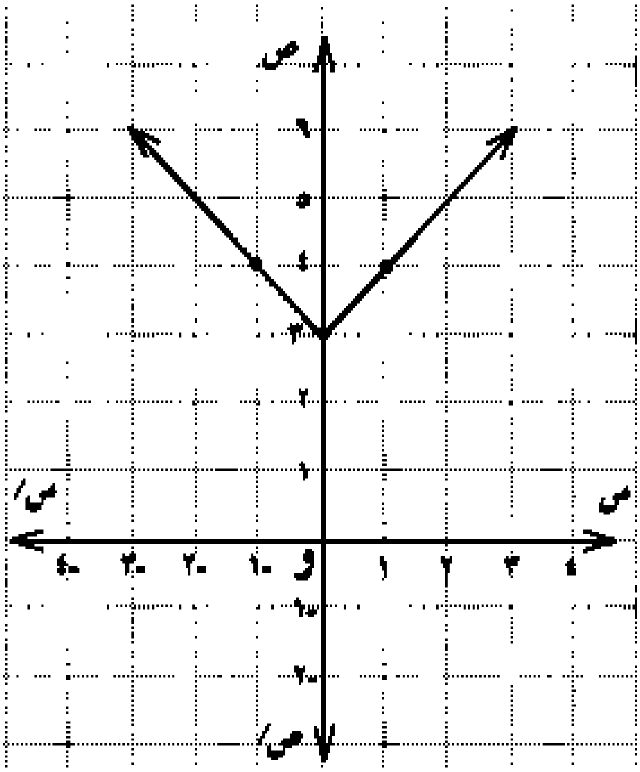
حل آخر :منحنى هذه الدالة نفس منحنى |س| و لكن بازاحة ثلاث وحدات فى الاتجاة الموجب لمحور السينات . الازاحة السينية = ٣ ، و الازاحة الصادية = ٠
ثم نكمـــل الحل كما سبق .

ملحوظة :

الازاحة على محور السينات = صفر المقياس
الازاحة على الصادات = العدد خارج المقياس (العدد المضاف الى المقياس)

- **التحويلات الهندسية لدالة المقياس .**
- **الازاحة الرأسية (فى اتجاه محور الصادات) :**

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س | + ٣ مع ذكر المجال والمدى ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل

تمثل بيانياً بشعاعين من

النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٠ ، ٣)

مجال الدالة = ح

مدى الدالة = [٣ ، ∞ [

] − ∞ ، ٠] تناقصية

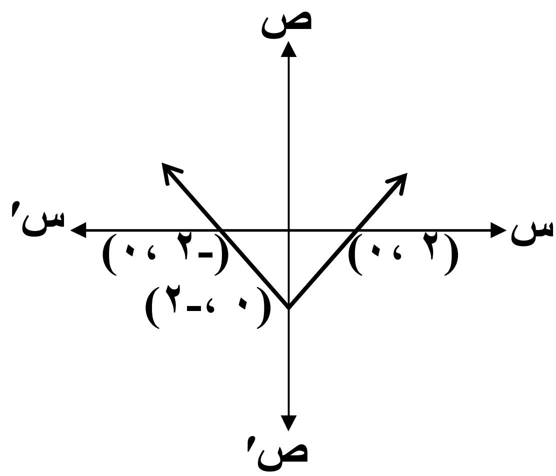
[٠ ، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات

حل آخر : الازاحة السينية = ٠ ، الازاحة الصادية = ٣
∴ مبدا الشعاعين (٠ ، ٣) تسمى نقطة الرأس للمنحنى نكمل الحل بنفس الحل

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س | -٢ مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



نقطة الرأس (٠ ، - ٢)

المجال ح

المدى = [-٢ ، ∞ [

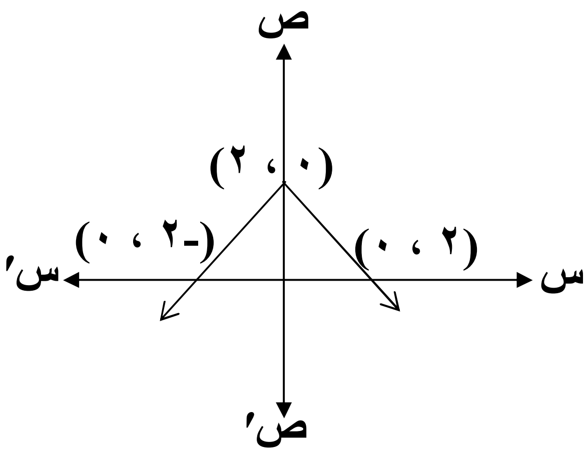
د متناقصة فى]- ∞ ، ٠ [

د متزايدة فى [٠ ، ∞ [

د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

مثال :ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ ـ | س | مع ذكر مجال و مدى الدالة .
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



المجال ح

المدى =]- ∞ ، ٢]

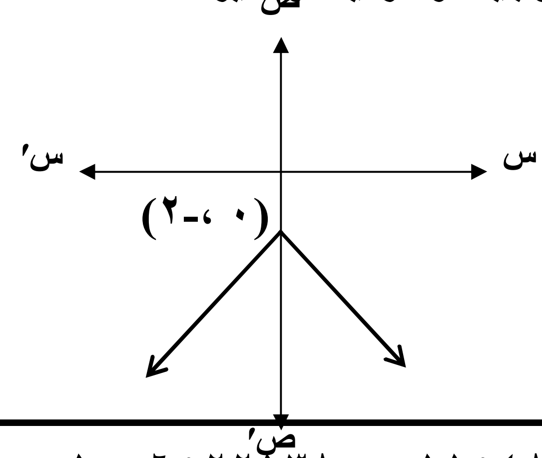
د متزايدة فى]- ∞ ، ٠ [

د متناقصة فى [٠ ، ∞ [

د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س | - ٢ مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



المجال ح

المدى =]- ∞ ، -٢]

د متزايدة فى]- ∞ ، ٠ [

د متناقصة فى [٠ ، ∞ [

د زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

* الازاحة الأفقية (فى اتجاه محور السينات):

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س – ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

الازاحة السينية = ٢ ، الصادية = ٠ ∴ راس المنحنى (٢ ، ٠)

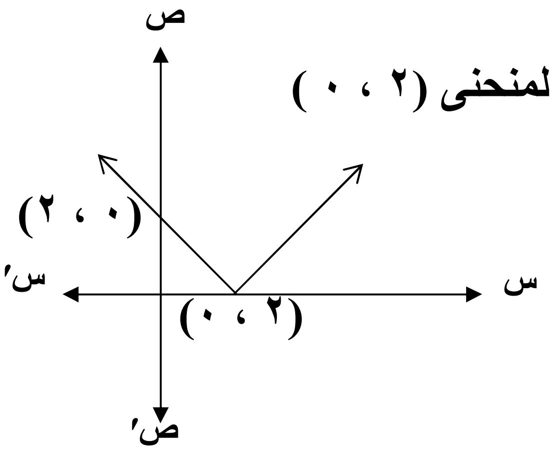
المجال ح

المدى = [٠، ∞ [

د متناقصة فى]- ∞ ، ٢]

د متزايدة فى [٢ ، ∞ [

د لازوجية ولافردية



مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = | س + ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

الازاحة السينية = ـ ٢ ، الصادية = ٠ ، راس المنحنى (ـ ٢ ، ٠)

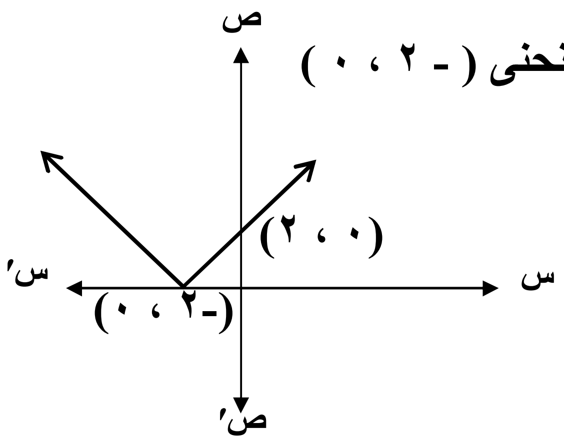
المجال ح

المدى = [٠ ، ∞ [

د متناقصة فى]- ∞ ، -٢]

د متزايدة فى [-٢ ، ∞ [

د لازوجية ولافردية



مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = ـ | س – ٢| مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

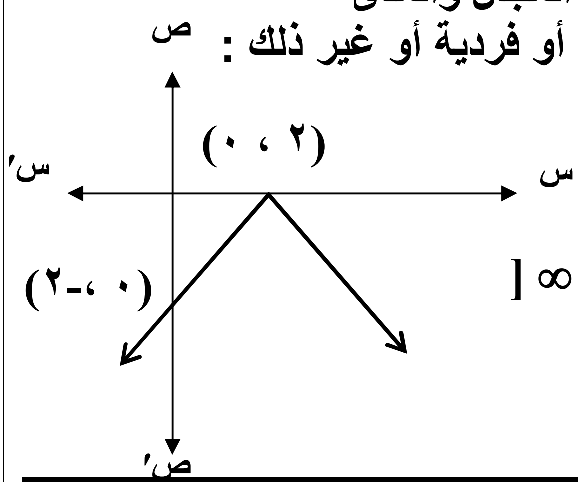
(الحل)

نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠)

المجال ح ، المدى =]- ∞ ، ٠]

د متزايدة فى]- ∞ ، ٢] ، د متناقصة فى [٢ ، ∞ [

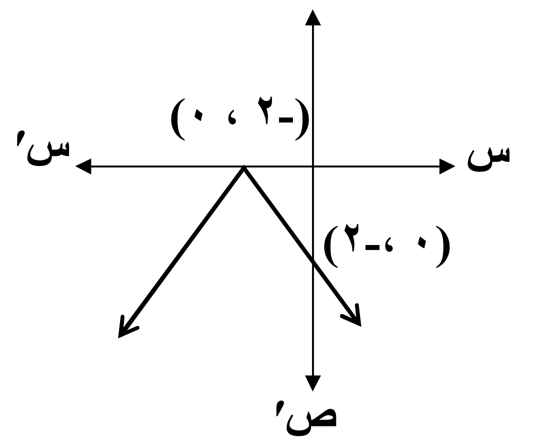
د لازوجية ولافردية



مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س + ٢ | مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(الحل)

نقطة راس المنحنى (- ٢ ، ٠)
المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٠]
د متزايدة فى]- ∞ ،-٢[
د متناقصة فى]-٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية

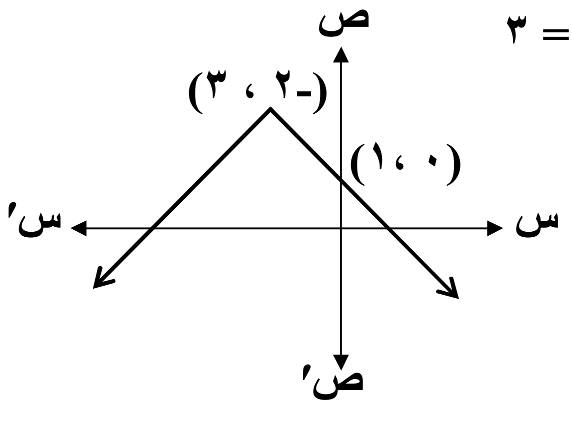


- **الازاحة الأفقية و الرأسية (فى اتجاهى محورى الاحداثيات) :**

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = - | س + ٢ | +٣ مع ذكر المجال والمدى
ابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

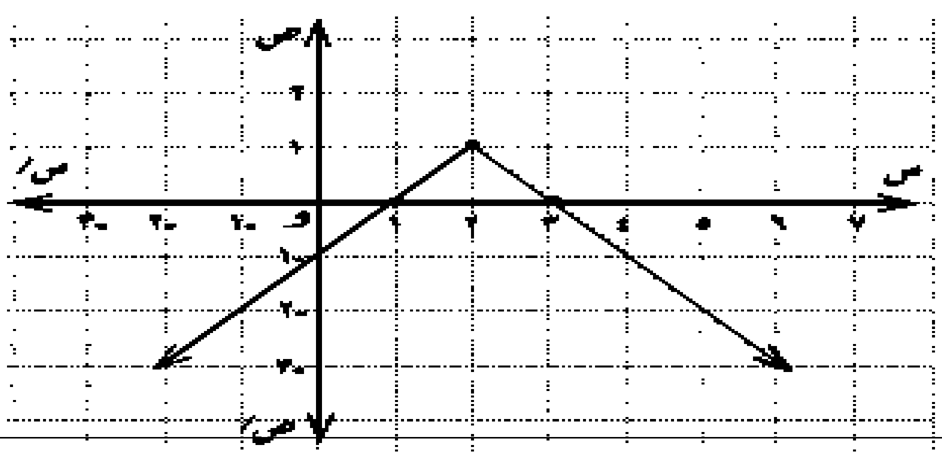
(الحل)

الازاحة السينية = - ٢ ، الازاحة الصادية = ٣
المجال ح
المدى =]- ∞ ، ٣]
د متزايدة فى]- ∞ ، - ٢[
د متناقصة فى]-٢ ، ∞ [
د لازوجية ولافردية



ارسم منحنى الدالة د (س) = ١ − |س − ٢ |

الحل



تمثل بيانياً بشعاعين من النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) = (٢ ، ١)

مجال الدالة = ح   مدى الدالة =] – ∞ ، ١]

] – ∞ ، ٢] تزايدية   [٢ ، ∞ [تناقصية

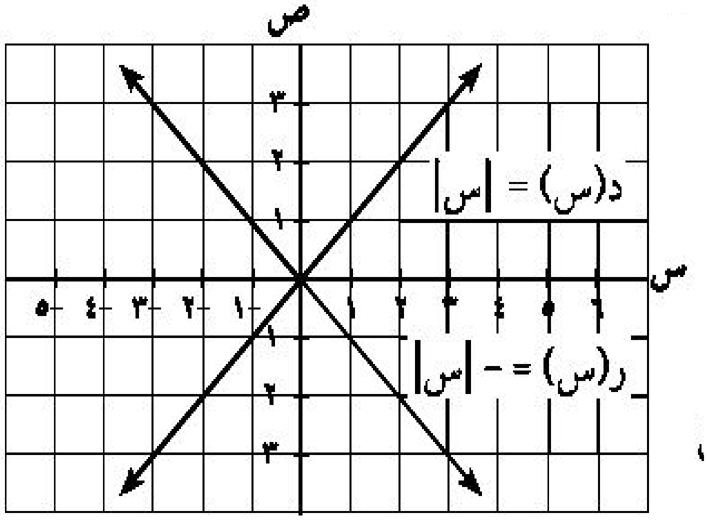
الدالة لا فردية ولا زوجية

- **<u>انعكاس دالة المقياس :</u>**

منحنى الدالة ر حيث ر(س) = – | س |

هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س)

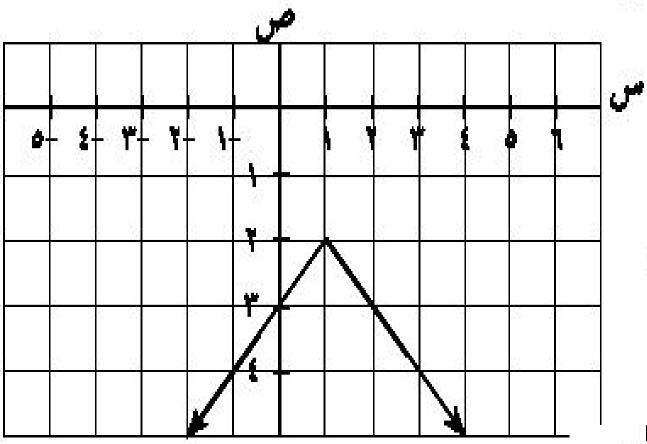
حيث د(س) = | س | على محور السينات



مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = | س | لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :

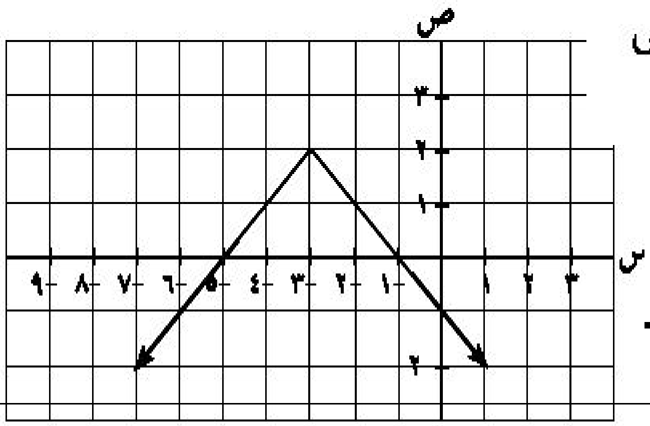
(أ) ر(س) = – | س – ١ | - ٢   (ب) عِ(س) = ٢ - | س + ٣ |

الحل



(أ) منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة وحدة واحدة أفقية إلى اليمين و٢ وحدة رأسية إلى أسفل.

(ب) منحنى ع (س) هو انعكاس لمنحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات أفقية إلى اليسار و٢ وحدة رأسية إلى أعلى.



- **تدريب على دالة المقياس :**

[١] مثل بيانيا كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .
و اذكر معادلة محور التماثل إن وجد .

(١) د(س) = | س | + ٤ (٢) د(س) = | س – ٣ |

(٣) ر(س) = | س | + س (٤) ر(س) = | ٢ س + ٣ | + ٣ س – ١

(٥) د(س) = | س + ٣ | (٦) د(س) = | س – ٢ | + ٣

(٧) د(س) = ١ ـ | س – ٢ | (٨) د(س) = | ٤ س – ٢ س | ـ ٣

(٩) د(س) = س ـ | س ـ ٣ | (١٠) د(س) = ٢ ـ | س |

[٢] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = | س | لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع :

(أ) ر(س) = | س + ٤ | (ب) ع(س) = | س – ٢ |

(حـ) ر(س) = | س | - ٥ (ى) ع(س) = | س | + ٦

(هـ) ر(س) = | س + ٣ | - ١ (و) ع(س) = | س – ٢ | + ٤

---

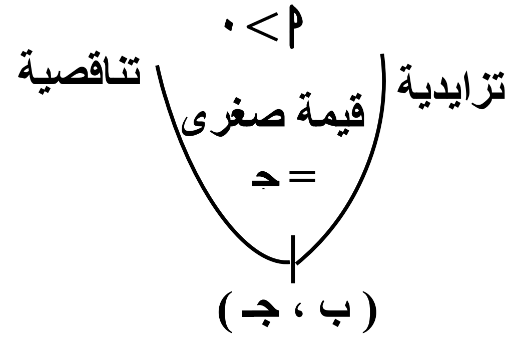
* **تذكـــــــــر أن :**

نقطة رأس منحنى الدالة ص = م س^{٢} + ب س + حـ ، م ≠ ٠

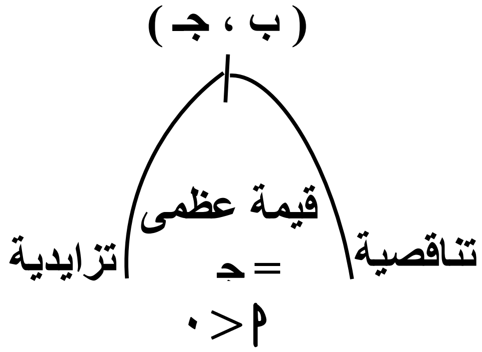
هى ($\frac{-ب}{٢م}$ ، د($\frac{-ب}{٢م}$))

الدالة التربيعية

إذا كانت : الصورة العامة هى د(س) = أ (س ـ ب) ^{٢} + جـ ، أ ≠ ٠
تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين لأعلى أو لأسفل
و تكون نقطة الرأس المنحنى = (ب ، جـ)
، معادلة خط التماثل هى س = ب
الازاحة السينية (الانتقال فى اتجاه محور السينات) = ب
، الازاحة الصادية (الانتقال فى اتجاه محور الصادات) = جـ



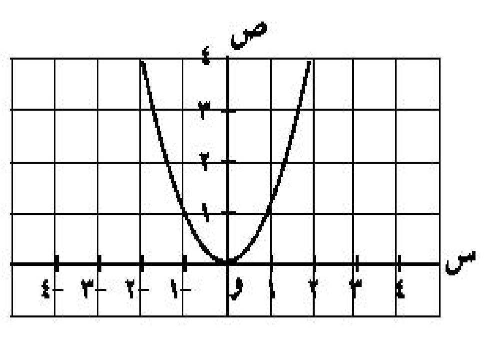
إذا كان : أ > ٠ (موجبة)
مدى الدالة = [جـ ، ∞ [
الدالة تزايدية فى [ب ، ∞ [
الدالة تناقصية فى] - ∞ ، ب]



إذا كان : أ < ٠ (سالبة)
مدى الدالة =] - ∞ ، جـ]
الدالة تزايدية فى] - ∞ ، ب [
الدالة تناقصية فى] ب ، ∞ [

الشكل التالى يمثل أبسط صورة لمنحنى الدالة التربيعية د حيث.

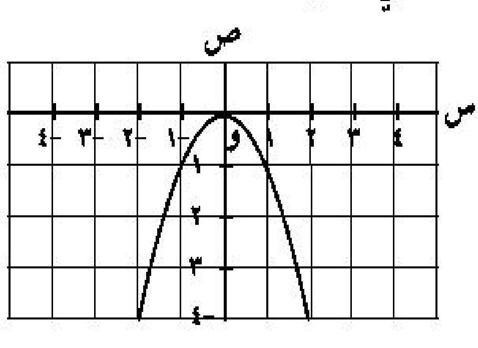
د (س) = س^{٢}



➤ أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).

ومنحنى الدالة د حيث (س) = -س^{٢} هو انعكاس لمنحنى د (س) = س^{٢} في محور السينات حيث



➤ أ = -١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

➤ نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).

- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة = [٠ ، ∞ [
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠ [وتزايدية فى]٠ ، ∞ [

- منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات وبالتالى فإن الدالة زوجية.
- مدى الدالة =]-∞ ، ٠]
- الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٠ [وتناقصية فى]٠ ، ∞ [

ملاحظات :

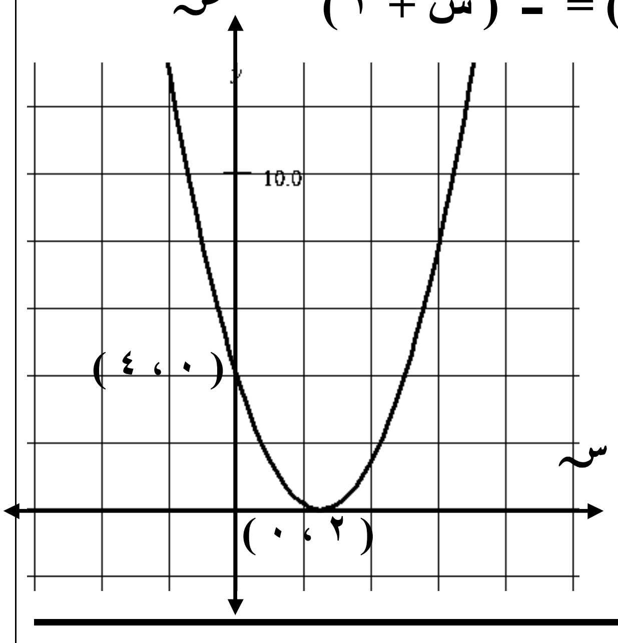
١. لرسم د(س) = م(س - ب)^{٢}+ جـ نحدد نقطة رأس المنحنى هى (ب ، جـ)
٢. الدالة التربيعية و دالة المقياس لهما نقطة رأس للمنحنى
٣. المنحنى د(س) = س^{٢} هو انعكاس للمنحنى د(س) = ـ د(س) فى محور السينات
٤. يجب وضع الدالة فى صورتها العامة (القياسية) قبل رسمها مثلا :
د(س) = س^{٢} +٦ س +٧ = (س^{٢} +٦ س+٩)+ ٧-٩ = (س+ ٣)^{٢}- ٢
د(س) = - س^{٢}-٤ س+ ٥ = - (س^{٢} +٤ س - ٥)
= - {(س^{٢} + ٤س+٤) – ٥ -٤} = - {(س+٢)^{٢} – ٩} = - (س+٢)^{٢}+٩
٥. لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

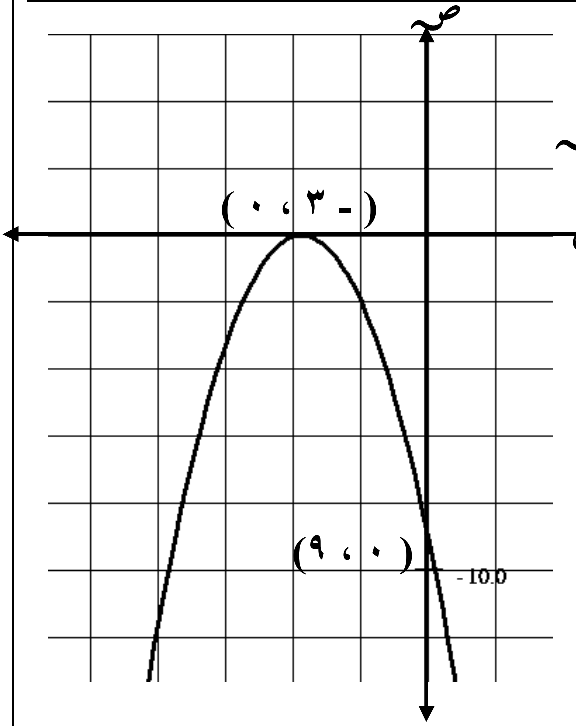
- **إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محور س (إزاحة أفقية) :**

مثال : استخدم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدالتين ر ، ع حيث :
(١) ر(س) = (س – ٢)^{٢} (٢) ع(س) = ـ (س + ٣)^{٢}

الحل :
(١) ر(س) = (س – ٢)^{٢}

هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور السينات .





(٢) ع(س) = - (س + ٣)^{٢}

هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس فى محور السينات

ثم ازاحته بثلاث وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات

- **إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محور ص (إزاحة رأسية) :**

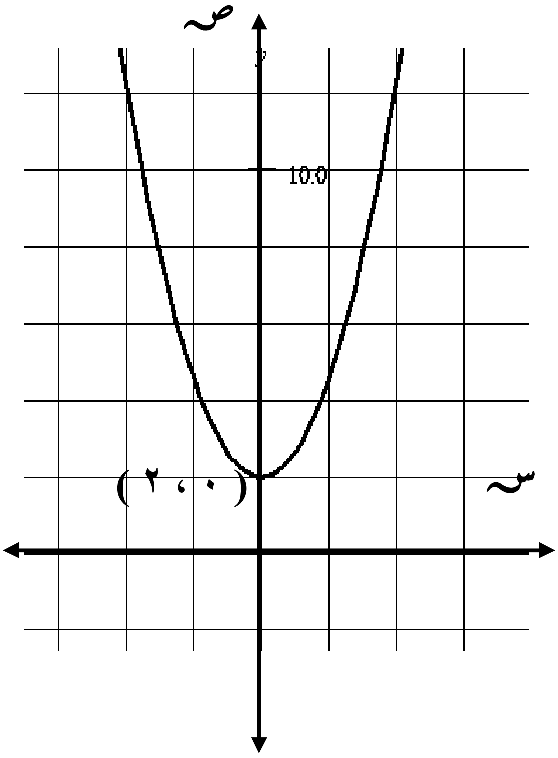
مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :

(١) ر(س) = س^{٢} + ٢ (٢) ع(س) = ـ س^{٢} ـ ١

و من الرسم عين نقطة رأس المنحنى و أوجد مدى الدالة .

الحل :

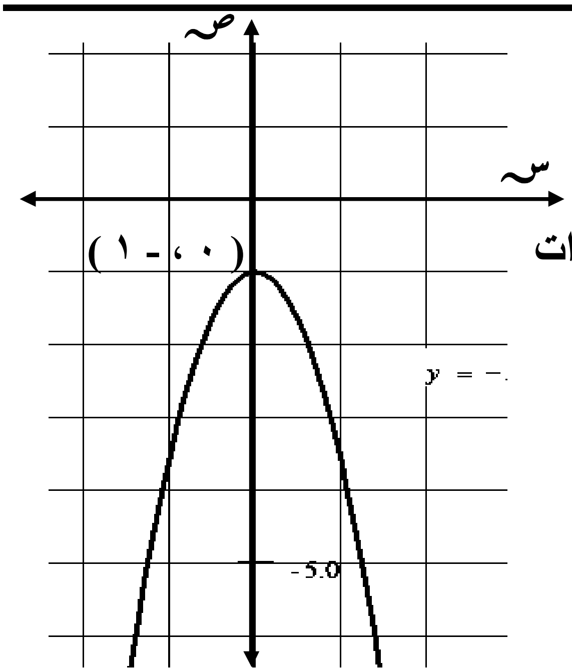
(١) ر(س) = س^{٢} + ٢



هو منحنى د(س) = س^{٢} بازاحة وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٢)

، المدى = [٢ ، ∞ [



(٢) ع(س) = ـ س^٢ ـ ١

هو منحنى د(س) = س^٢ بالانعكاس فى محور السينات

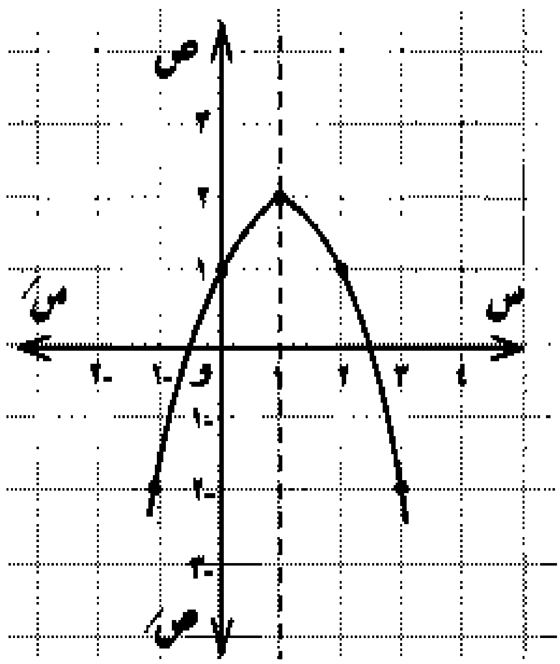
ثم ازاحة وحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، - ١)

، المدى =] - ∞ ، - ١]

- **<u>إزاحة منحنى الدالة فى اتجاهى محورى الإحداثيات</u> :**

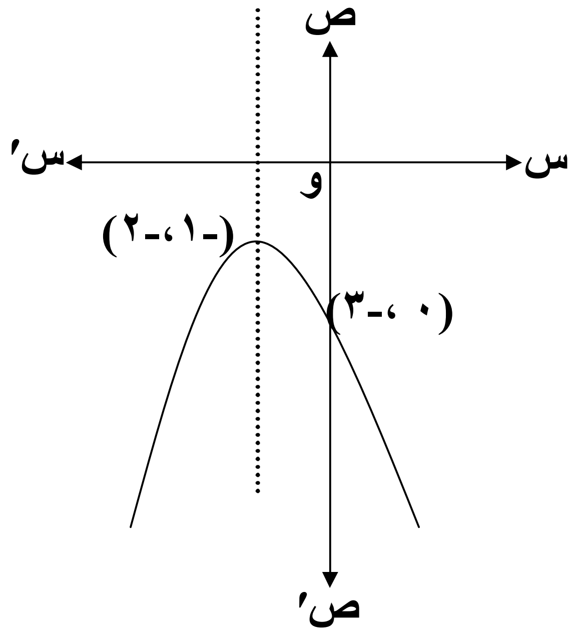
مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = ٢ - (س - ١)^٢ أوجد رأس المنحنى و المدى و الاطراد ونوع الدالة و معادلة محور التماثل .



الحل :

الازاحة السينية = ١ ، الازاحة الصادية = ٢
∴ راس المنحنى (١ ، ٢)
للرسم بدقة نوجد نقطة التقاطع مع محور الصادات
و ذلك بوضع س = ٠ ⟵ (٠ ، ١)
و على نفس المسافة من محور التماثل
و نستنتج النقطة (٢ ، ١)
المجال = ح
المدى =] - ∞ ، ٢]
الاطراد : متزايدة فى] - ∞ ، ١]
متناقصة فى [١ ، ∞ [
النوع : لا زوجية و لا فردية
لعدم تماثلها حول محور الصادات أو نقطة الاصل
معادلة محور التماثل س = ١

مثال: رُسم منحنى الدالة د(س) = - س^{٢} ثم أُجريت عليه ازاحات فأخذ المنحنى الصورة الآتية : د(س) = - (س + ١)^{٢} - ٢ عين هذه الإزاحات واذكر قاعدة الدالة مع ذكر المدى ومعادلة محور التماثل.



(الحل)

إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى الاتجاه السالب لمحور السينات متبوعة بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور الصادات .

قاعدة الدالة هى : د(س) =- (س+١)^{٢}- ٢

مدى الدالة =]- ∞ ،-٢]

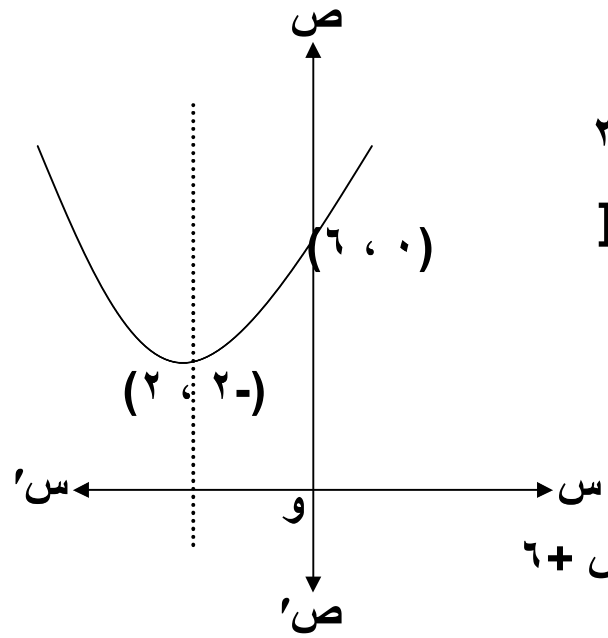
معادلة محور التماثل هى : س =-١

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س)= س^{٢}+٤س+٦ وابحث اطرادها واذكر مداها ومعادلة محور التماثل ، ثم بين كيف يمكن الحصول على منحنى الدالة من المنحنى د(س) = س^{٢}

(الحل)

يجب اعادة تعريف الدالة الى الصورة القياسية للدالة

د(س) = (س^{٢}+ ٤س +٤) + ٦-٤ = (س + ٢)^{٢}+ ٢



، د متناقصة فى]-∞ ،-٢[، د متزايدة فى [-٢ ، ∞ [

، د ليست زوجية ولافردية

، المدى = [٢ ، ∞ [

، معادلة محور التماثل هى س =-٢

، ويتم الحصول على منحنى الدالة د(س) = س^{٢}+٤ س +٦ من منحنى الدالة د(س) = س^{٢} وذلك بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه السالب لمحور السينات ، متبوعة بإزاحة مقدارها وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

*** تدريب على الدالة التربيعية :**

[١] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :
(أ) ر(س) = (س + ٢)^{٢} ـ ٤ (ب) ع(س) = ٢ ـ (س ـ ٣)^{٢}

و من الرسم عين إحداثى نقطة رأس المنحنى و إحداثيات نقط تقاطع المنحنى مع محورى الإحداثيات ، و ابحث إطراد كل من الدالتين .

[٢] استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث :
(أ) ر(س) = س^{٢} + ١ (ب) ع(س) = ـ س^{٢} ـ ٢

ز من الرسم عين نقطة رأس المنحنى و عين مدى الدالة .

[٣] ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} ـ ٦ س + ٩ ثم أوجد من الرسم رأس المنحنى ، المدى ، الاطراد نوع الدالة ، معادلة محور التماثل

[٤] ارسم كل من الدوال الآتية ثم عين المدى و الاطراد و النوع و معادلة محور التماثل .

(١) د(س) = س^{٢} ـ ١ (٢) د(س) = ١ ـ س^{٢} (٣) د(س) = (س ـ ١)^{٢}

(٤) د(س) = (س – ٢)^{٢} (٥) د(س) = (س – ٢)^{٢} + ١

(٦) د(س) = ـ (س ـ ١)^{٢} (٧) د(س) = ١ ـ (س – ١)^{٢}

(٨) د(س) = س^{٢} + ١ (٩) د(س) = ـ ٤ ـ (س – ١)^{٢}

(١٠) د(س) = س^{٢} حيث د : [- ١ ، ٣] ⟵ ح

(١١) د(س) = (س + ٢)^{٢} ـ ٢

(١٢) د(س) = س^{٢} ـ ٤ س + ٤

(١٣) د(س) = س^{٢} ـ ٤ س + ١

(١٤) د(س) = س | س |

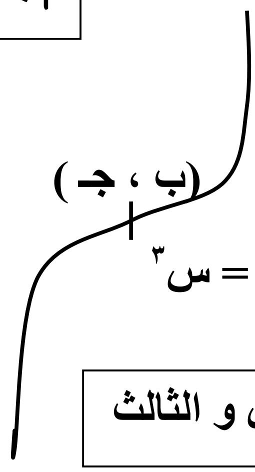
دالة الدرجة الثالثة (الدالة التكعيبية)

الصورة العامة : د(س) = أ (س ـ ب)^{٣} + جـ ، أ = ± ١

تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين أحدهما لأعلى و الآخر لأسفل

منحنى الدالة متماثل حول النقطة (ب ، جـ) و هى رأس المنحنى (نقطة التماثل)

أ > ٠ (موجبة)



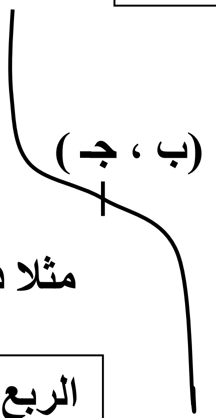
مثلا د(س) = س^{٣}

الربع الاول و الثالث

الدالة تزايدية على ح

الدالة لا زوجية و فردية

أ < ٠ (سالبة)



مثلا د(س) = ـ س^{٣}

الربع الثانى و الرابع

الدالة تناقصية على ح

الدالة لا زوجية و فردية

*** ملاحظات :**

١ـ إذا كانت جـ = صفر فإن نقطة التماثل هى (ب ، ٠)

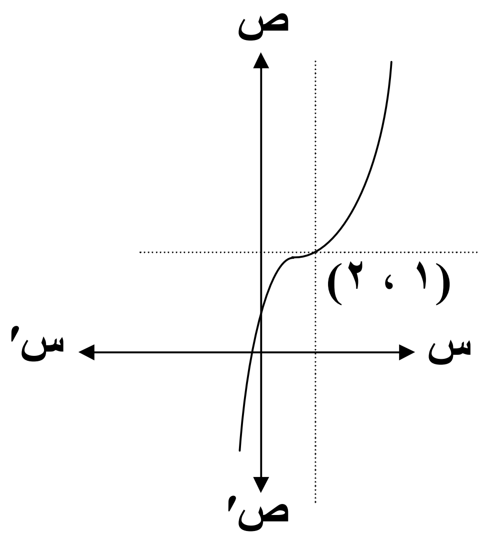
٢ـ إذا كانت ب = جـ = صفر فإن نقطة التماثل (٠ ، ٠) و تكون الدالة فردية

٣ـ نحصل على منحنى الدالة د(س) = أ (س – ب) + جـ بعد إزاحته أفقيا مقدار | ب | بعكس إشارتها على محور السينات لليمين إذا كانت ب موجبة و لليسار إذا كانت ب سالبة

٤ـ وازاحته رأسيا مقدار |جـ | لأعلى إذا كانت جـ موجبة و لأسفل إذا كانت جـ سالبة

- **<u>إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محورى الإحداثيات</u> :**

مثال : ارسم د(س) = (س - ١)^{٣} + ٢ اذكر مداها وابحث اطرادها

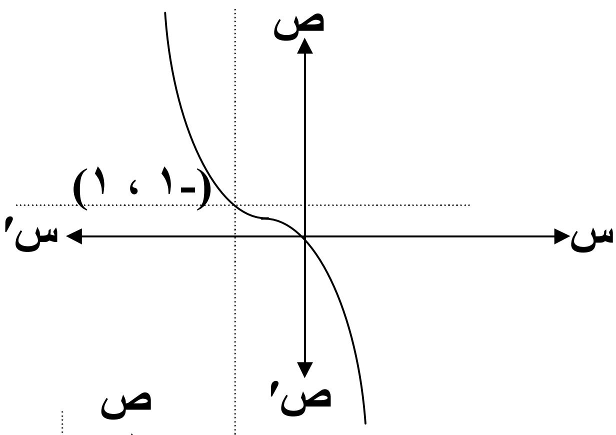


<u>(الحل)</u>

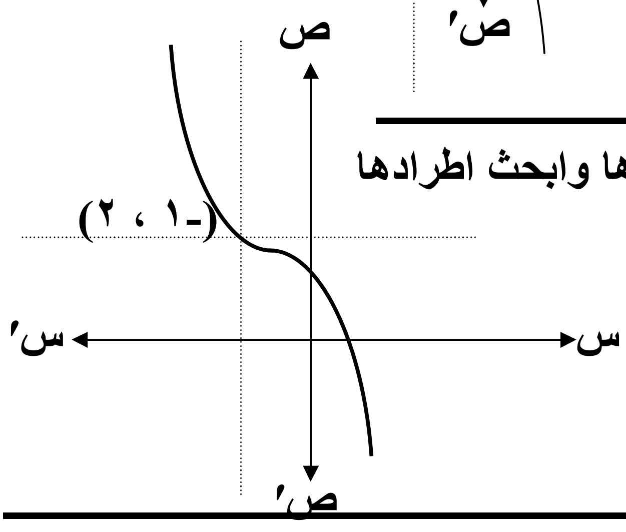
نقطة التماثل هى (١ ، ٢)
المدى ح
الدالة متزايدة على مجالها ح
الدالة لازوجية ولافردية

مثال: ارسم د(س) = - (س + ١)^{٣} + ١ اذكر مداها وابحث اطرادها

<u>(الحل)</u>



نقطة التماثل هى (-١ ، ١)
المدى= ح
الدالة متناقصة على مجالها ح
الدالة لافردية ولازوجية



مثال : ارسم د(س) = ٢ - (س + ١)^{٣} اذكر مداها وابحث اطرادها
الحل :
نقطة التماثل هى (-١ ، ٢)
المجال = ح ، المدى = ح
الاطراد : تناقصية على مجالها
نوع الدالة : لا زوجية و لا فردية

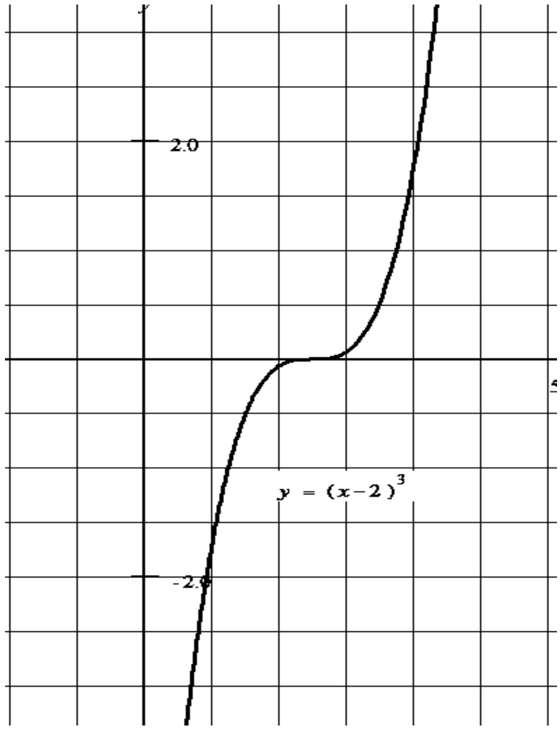
مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٣ لتمثيل كل من الدوال الآتية ثم أوجد نقطة التماثل :

(أ) ر(س) = (س – ٢)^٣　　(ب) ر(س) = س^٣ ـ ٣

(حـ) ر(س) = ٤ – س^٣　　(د) ر(س) = ١ ـ (س + ٢)^٣

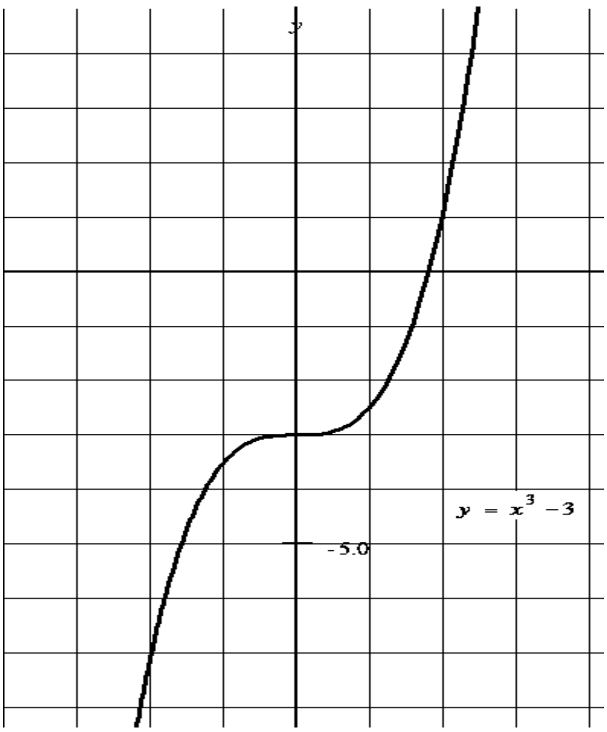
الحل :

(أ) ر(س) = (س – ٢)^٣



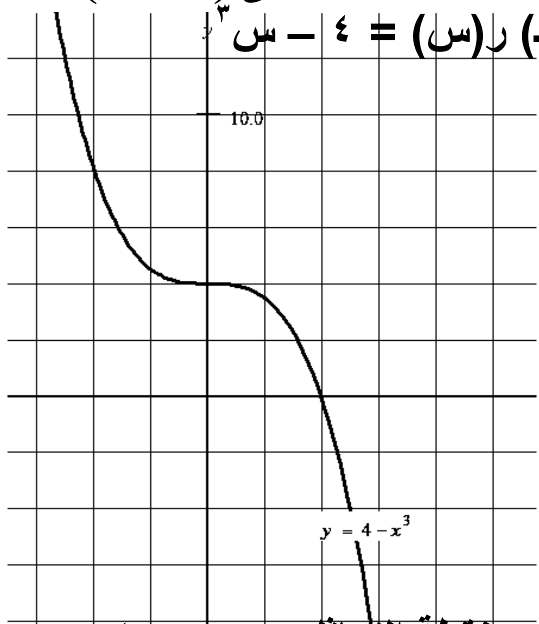
نقطة التماثل هى (٢ ، ٠)

(ب) ر(س) = س^٣ ـ ٣



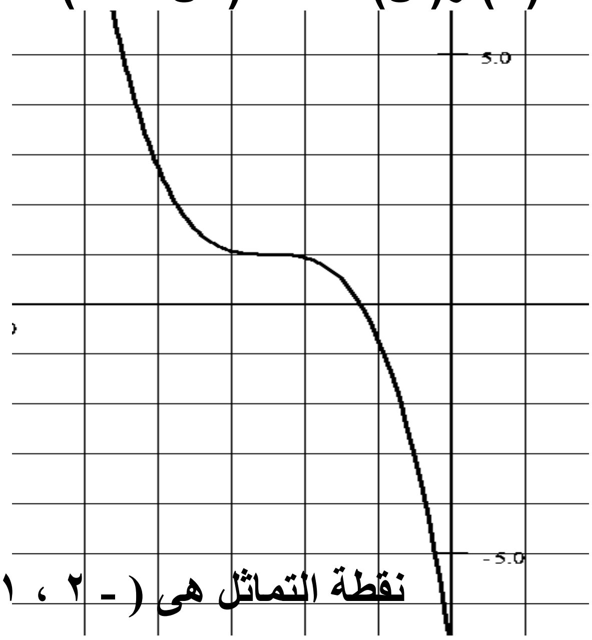
نقطة التماثل هى (٠ ، ـ ٣)

(حـ) ر(س) = ٤ – س^٣



نقطة التماثل هى (٠ ، ٤)

(د) ر(س) = ١ ـ (س + ٢)^٣



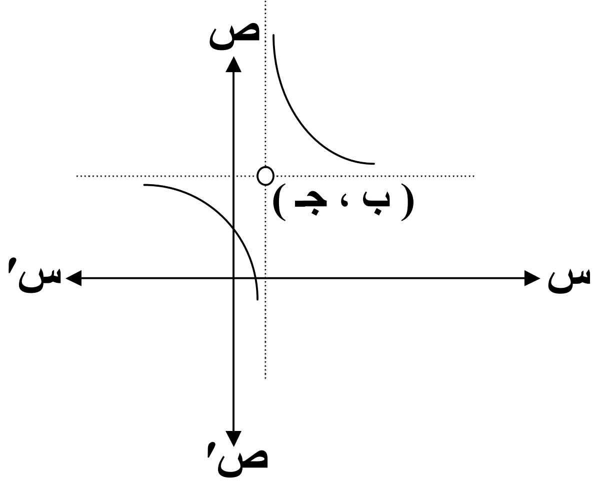
نقطة التماثل هى (ـ ٢ ، ١)

الدالة الكسرية

الصورة العامة : $د(س) = \frac{ك}{س - ب} + جـ$ ، ك $\neq$ ٠، س $\neq$ ب

نقطة التماثل هى (ب ، جـ)

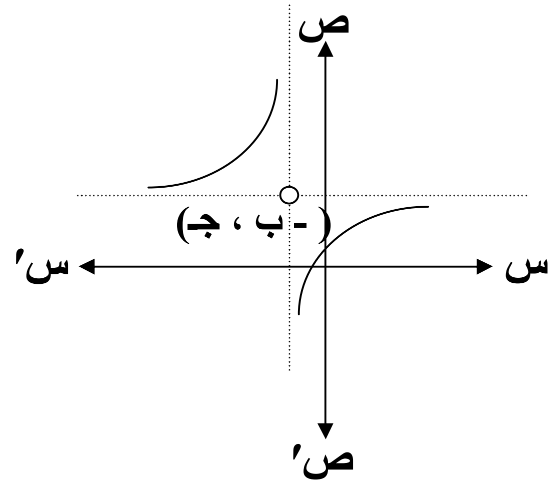
ويكون مجالها = ح – { ب } ، مداها = ح – { جـ }



الدالة تناقصية فى] ب ، ∞ [،] - ∞ ، ب[

المنحنى يقع فى الربعين الاول و الثالث

الدالة لا زوجية ولا فردية



الدالة تزايدية فى] - ∞، - ب [،]- ب،∞[

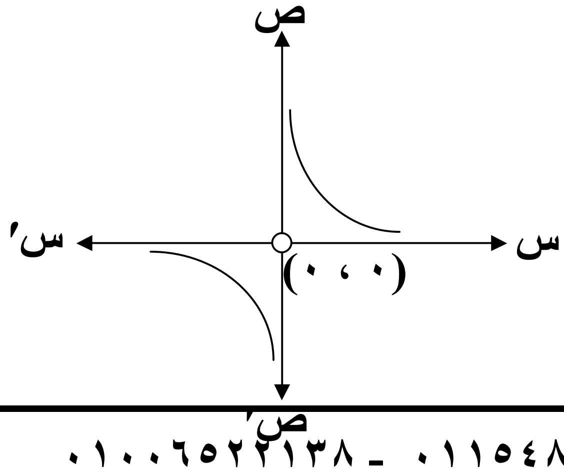
المنحنى يقع فى الربعين الثانى و الرابع

الدالة لا زوجية ولا فردية

<u>ملحوظة:</u> إذا كانت نقطة التماثل (٠ ، ٠) فأن الدالة فردية

مثال: ارسم منحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{س}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



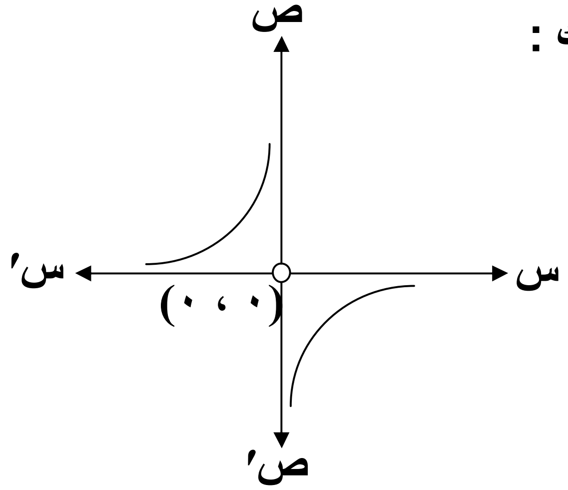
المجال = ح – {٠}

المدى = ح – {٠}

د متناقصة فى]- ∞ ، ٠[،]٠، ∞ [

د فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{-١}{\text{س}}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

المجال = ح – {٠}

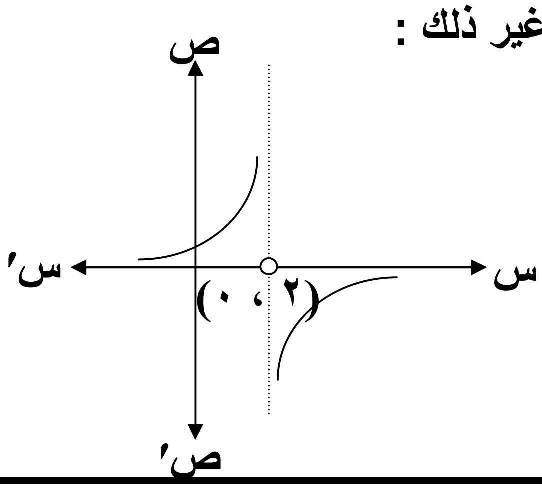
المدى = ح – {٠}

د متزايدة فى]- ∞ ،٠[،]٠، ∞ [

د فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

- **التحويلات الهندسية للدالة الكسرية : (فى اتجاهى محورى الاحداثيات)**

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{-١}{\text{س} - ٢}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

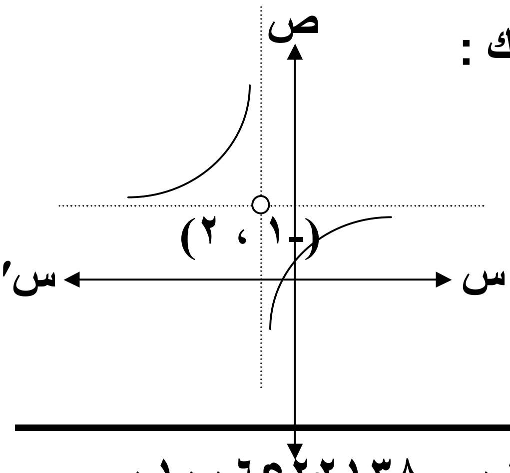
المجال = ح – {٢}

المدى = ح – {٠}

د متزايدة فى]- ∞ ،٢[،] ٢ ، ∞ [

د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = - $\frac{١}{\text{س} + ١}$ +٢ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



الحل :

المجال = ح – {-١}

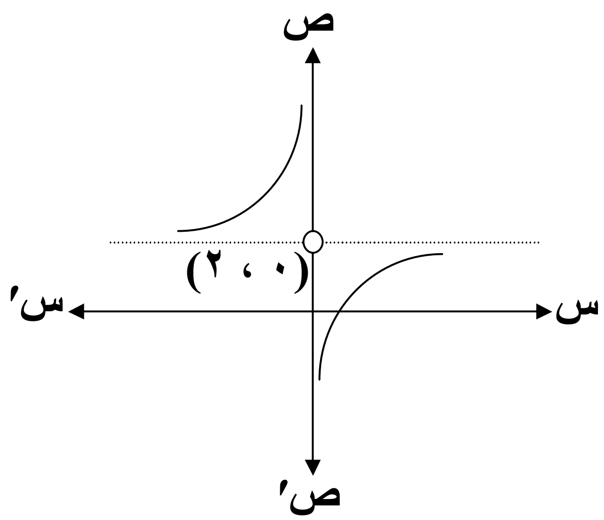
المدى = ح – {٢}

د متزايدة فى]- ∞ ،-١[،] -١، ∞ [

د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{\text{٢ س - ١}}{\text{س}}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها
واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :



د(س) = $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{٢} - \frac{\text{١}}{\text{س}}$

المجال = ح – {٠}

المدى = ح – {٢}

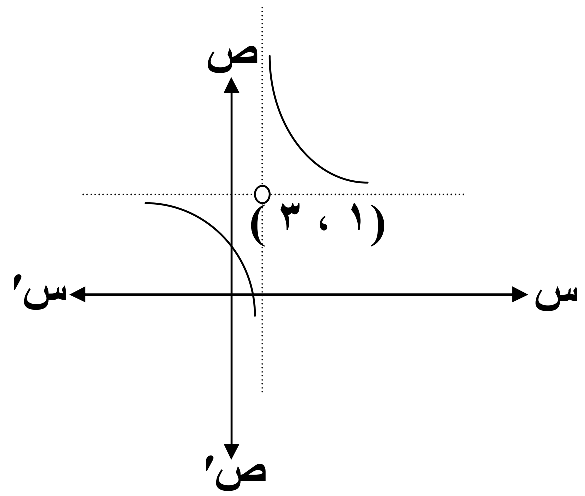
د متزايدة فى]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

د لافردية ولازوجية

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{\text{٣ س - ٢}}{\text{س - ١}}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها
واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :

د(س) = $\frac{\text{٣ س – ٣ – ٢ + ٣}}{\text{س - ١}} = \frac{\text{٣(س – ١) + ١}}{\text{(س – ١)}} = \text{٣} + \frac{\text{١}}{\text{س - ١}}$



المجال = ح – {١}

المدى = ح – {٣}

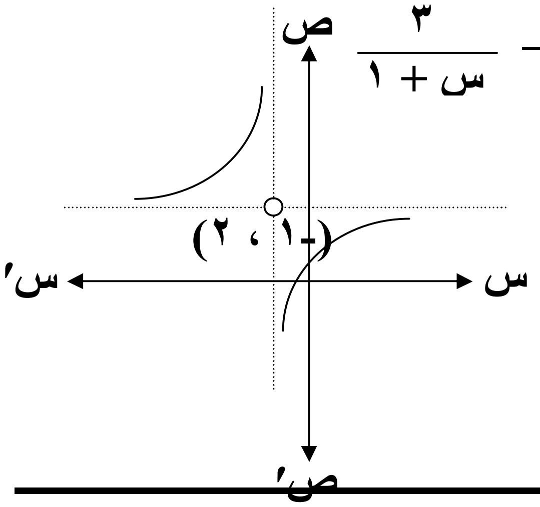
د متناقصة فى]- ∞ ، ١[،]١ ، ∞[

د لافردية ولازوجية

مثال : ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{\text{٢ س - ١}}{\text{س + ١}}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها
واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحل :

$د(س) = \frac{٢ س + ٢ - ١ - ٢}{س + ١} = \frac{٢ (س + ١) - ٣}{س + ١} = ٢ - \frac{٣}{س + ١}$



نقطة التماثل (-١ ، ٢)

المجال = ح – { -١ }

المدى = ح – { ٢ }

الدالة متزايدة فى] - ∞ ، -١ [،] – ١ ، ∞ [

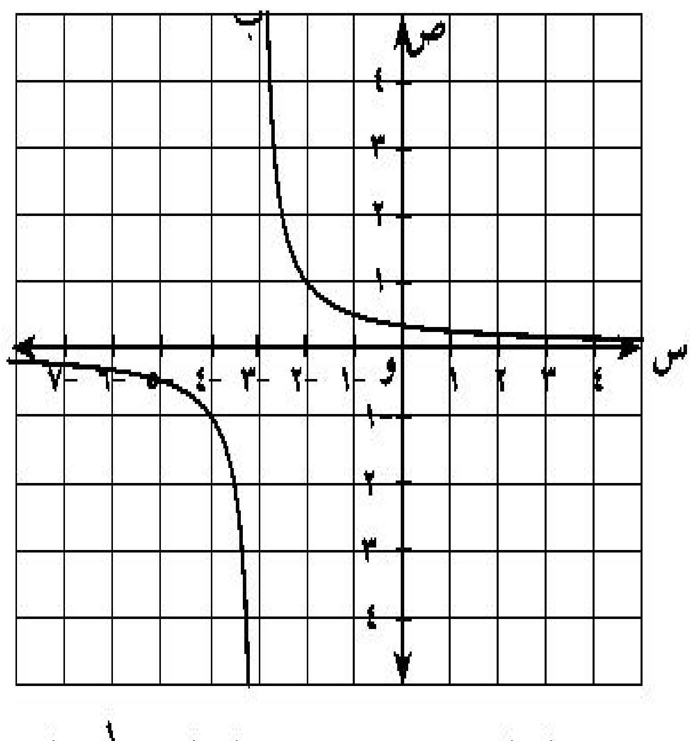
الدالة لا فردية و لا زوجية

مثال : استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ لتمثيل :

(أ) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ (ب) د(س) = $\frac{١}{س - ١} + ٣$

الحل :

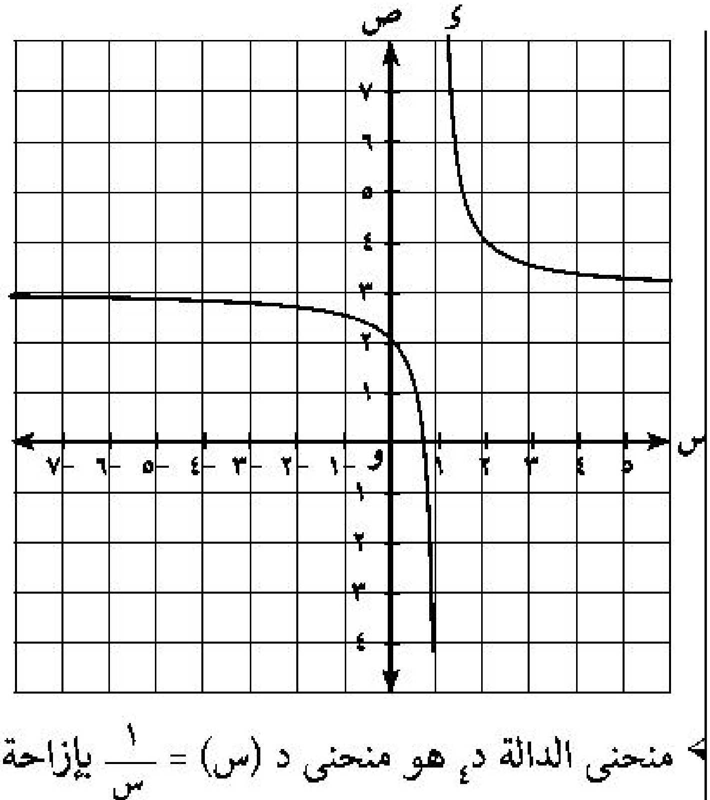
(أ)



◄ منحنى الدالة $د_٢$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات.

◄ نقطة التماثل للدالة $د_٢$ هي: (-٣ ، ٠).

(ب)



◄ منحنى الدالة $د_٤$ هو منحنى د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم إزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

◄ نقطة التماثل للدالة $د_٤$ هي: (١ ، ٣).

تدريب :

مثل كلا من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية و من الرسم أوجد مجال و مدى كل دالة و ابحث اطرادها و نوعها من حيث كونها فردية أو زوجية أو غير ذلك :

١) د(س) = $\frac{٢}{س}$ (٢) د(س) = $\frac{-٢}{س}$ (٣) د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٣

٤) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ (٥) د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ (٦) د(س) = $\frac{٢س + ٤}{س - ٣}$

٧) د(س) = $\frac{١}{|س + ٣|}$ (٨) د(س) = $\frac{(س - ٢)^{٢}}{|(س - ٢)^{٣}|}$ (٩) د(س) = $\frac{٣س - ١}{س}$