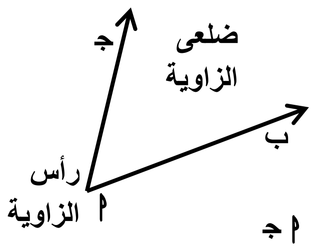
ثانيا حساب المثلثات

الفصل الأول

طرق قياس الزاوية

قد علمنا سابقا أن الزاوية هى مجرد إتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية تسمى هذه النقطة رأس الزاوية ويسمى الشعاعان بضلعى الزاوية



ففى الشكل المقابل :

⊙ أ ب ، أ ج شعاعان يمثلان ضلعا الزاوية

⊙ النقطة أ تمثل رأس الزاوية

⊙ أ ب ∪ أ ج = (ب أ ج)

ويمكن التعبير بها كالتالى∠ ب أ ج

الزاوية الموجهة :-

من التعريف السابق للزاوية نجد أن الزاوية السابقة يمكن قراءتها كالتالى∠ ب أ ج أو∠ ج أ ب

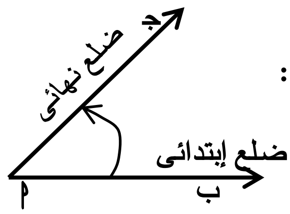
ولكن إذا عمدنا ترتيب الضلعين أحدهما نهائى والاخر إبتدائى فإن المفهوم السابق للزاوية يتغير ويصبح الزاوية الموجهة لذا فإنه فى حالة الزاوية الموجهة تكون الزاوية عبارة عن زوج مرتب من الاشعة مسقطه الاول هو الضلع الابتدائى والمسقط الثانى هو الضلع النهائى

تعريف الزاوية الموجهة :

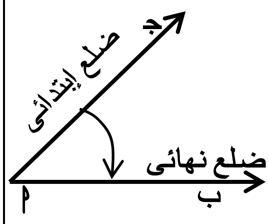
هى زوج مرتب من شعاعين (هما ضلعا الزاوية) لهما نفس نقطة البداية تسمى رأس الزاوية

فى الشكل المقابل :

١) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو و أ والضلع النهائى هو و ب فإن :
الزوج المرتب (و أ ، و ب) يعبر عن الزاوية الموجهة∠ أ و ب



٢) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو و ب والضلع النهائى هو و أ فإن :
الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن الزاوية الموجهة∠ ب و أ



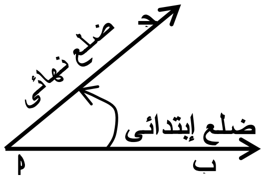
ملحوظة مهمة :

⊙ الزاوية الموجهة (أ و ب) ≠ الزاوية الموجهة (ب و أ)

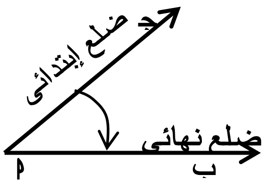
⊙ فى الزاوية الموجهة يرسم سهم خارج من الضلع الابتدائى الى النهائى

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

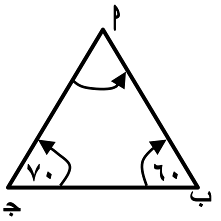
١) قياس الزاوية الموجهة يكون موجب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى عكس حركة عقارب الساعة

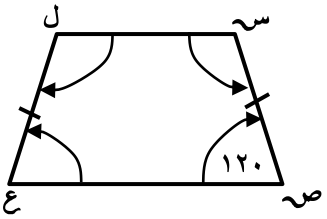


٢)قياس الزاوية الموجهة يكون سالب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى نفس حركة عقارب الساعة



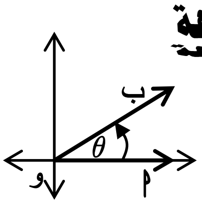
تدريب : اوجد قياس كلا من الزوايا الاتية





الوضع القياسى للزاوية الموجهة

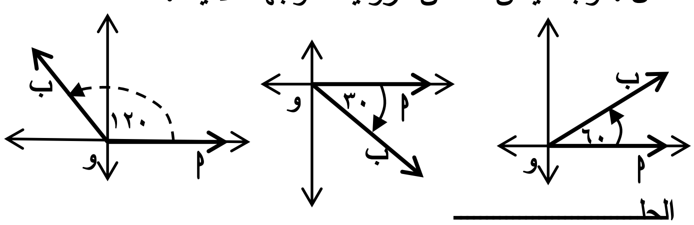
تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق :



⊙ رأس الزاوية منطبق على نقطة الاصل

⊙الضلع الابتدائى للزاوية ينطبق على محور السينات الموجب

مثال : أوجد قياس كلا من الزوايا الموجهة الاتية :



الحل

١) ق(أوب) الموجهة القياسية = ٦٠ °

٢) ق(أوب) الموجهة القياسية = - ٣٠ °

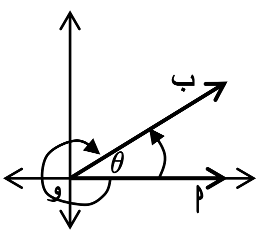
٣) ق(أوب) الموجهة القياسية = + ١٢٠°

قياس الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى

الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى لها قياسان إحداهما موجب والاخر سالب وذلك كالتالى:

فى الشكل المقابل :

الزاوية أ و ب التى صنعها الضلع النهائى و ب مع الضلع الابتدائى و أ



فإذا كانت θ = ٦٠ على سبيل المثال فإن الضلع النهائى يكون مساره كالتالى :

⊙ المسار الاول هو انه دار فى عكس حركة عقارب الساعة وذلك ما يبينه السهم الاول
وفى تلك الحالة ⟸ ق(أ و̂ ب)= + ٦٠

⊙ المسار الثانى انه دار فى نفس حركة عقارب الساعة وذلك ما يبينه السهم الثانى وفى تلك الحالة ⟸ ق(أو̂ب)= - ٣٠٠
ونلاحظ أن مجموع مقياسى

ملاحظات مهمة :

١) ق(أ و̂ ب) الموجهة = - ق(ب و̂ أ) الموجهة
فمثلا إذا كان: ق(أ و̂ ب)الموجهة = ٧٠
⟸ ق(ب و̂ أ) الموجهة = - ٧٠

٢) لكل زاوية موجهة فى الوضع القياسى قياسان إحداهمنا موجب والاخر سالب

٣) القياس الموجب للزاوية السالبة س = سـ + ٣٦٠

٤) القياس السالب للزاوية الموجبة س = سـ – ٣٦٠

مثال ٣ : اوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا الاتية :
١) θ = - ٦٠   ٢) θ = - ١٦٠°   ٣) θ =- ٣٠٠°

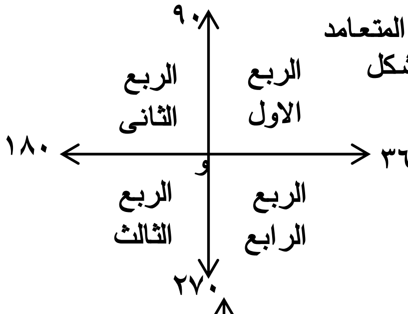
الحل
١) القياس الموجب للزاوية - ٦٠ هو - ٦٠ + ٣٦٠ =٣٠٠°
٢) القياس الموجب للزاوية - ١٦٠ =- ١٦٠ + ٣٦٠ =٢٠٠°
٣) القياس الموجب للزاوية – ٣٠٠ = - ٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠°

مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكل من الزوايا الاتية :
١) ١٢٠°   ٢) ٨٠°   ٣) ٢٤٠°

الحل
١) القياس السالب للزاوية ١٢٠° = ١٢٠ - ٣٦٠ = - ٢٤٠°
٢) القياس السالب للزاوية ٨٠ = ٨٠ – ٣٦٠ = - ٢٨٠°
٣) القياس السالب للزاوية ٢٤٠ = ٢٤٠ – ٣٦٠ = - ١٢٠°

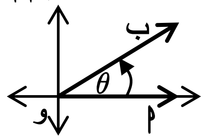
موقع الزاوية فى المستوى الاحداثي المتعامد

تم تقسيم المستوى الاحداثى المتعامد إلى اربعة ارباع كما فى الشكل

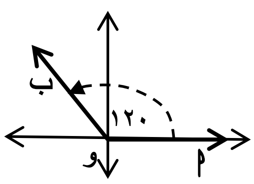


فإذا كانت الزاوية θ لها قيمة معينة فإن تلك القيمة تحدد فى اى ربع تقع كالتالى :

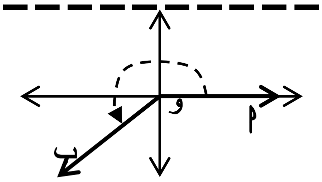
١) إذا كان: ٠ < θ < ٩٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الاول



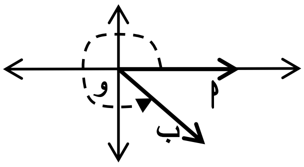
٢) إذا كان: ٩٠ < θ < ١٨٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثانى



٣) إذا كان: ١٨٠< θ < ٢٧٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثالث

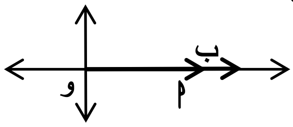


٤) إذا كان: ٢٧٠< θ < ٣٦٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الرابع

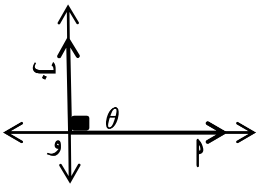


وفى حالة ان وقع الضلع النهائى على محور من المحاور مثل سـ أو صـ الموجب او السالب تسمى الزاوية فى تلك الحالة بالزاوية المحورية او الزاوية الربعية كالتالى :

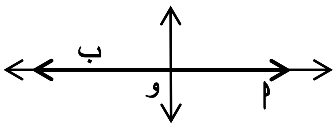
١) إذا كانت θ = صفر أو ٣٦٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا على المحور السينى الموجب



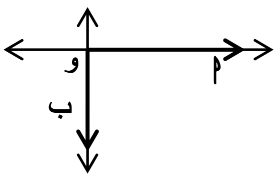
٢) إذا كانت θ = ٩٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا على المحور الصادى الموجب



٣) إذا كانت θ = ١٨٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا على محور السينات السالب



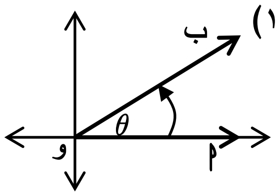
٤) إذا كانت θ = ٢٧٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا على محور الصادات السالب



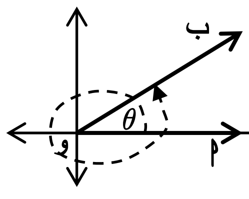
الزوايا المتكافئة

تأمل الاشكال الاتية بدقة ولاحظ :

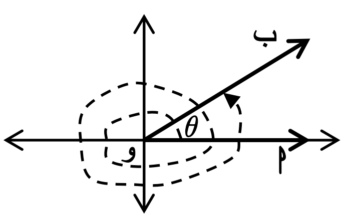
١)



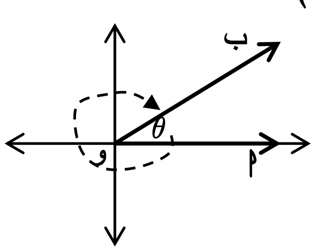
٢)



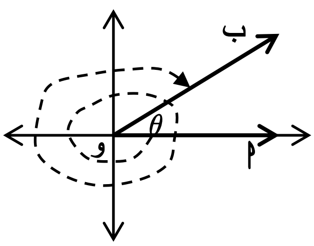
٣)



٤)



٥)



١) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ فقط لذا فإن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى هو θ

٢) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورة كاملة اى ان قياس الزاوية = θ +٣٦٠ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو= θ

٣) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورتين كاملتين اى ان قياس الزاوية = θ +٢×٣٦٠ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو= θ

٤) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورة كاملة – θ اى ان قياس الزاوية = ٣٦٠ – θ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو= θ

٥) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورتين كاملتين – θ اى ان قياس الزاوية =٢× ٣٦٠ – θ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو= θ

فى كل الاشكال السابقة نجد أن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى ثابت فى كل مرة وهو = θ
لذا فإن جميع الزوايا السابقة يقال عنها انها متكافئة

الزوايا المتكافئة :
هى تلك الزوايا التى لها نفس الضلع النهائى عندما تكون فى الوضع القياسى

ونستنتج مما سبق قاعدة مهمة جدا وهى أنه عندما يكون :
θ = θ ± ٣٦٠ = θ ± ٢×٣٦٠ = θ ± ٣ ×٣٦٠

ملاحظات مهمة :

١) إذا كانت θ قياس زاوية فإن جميع الزوايا التى قياسها { θ + ن × ٣٦٠ } تكون متكافئة حيث ن ∈ ص

٢) يمكن جمع (إضافة) أو طرح أى عدد من الدورات الكاملة للزاوية وذلك لن يؤثر فى موضع الضلع النهائى فى المستوى الاحداثى المتعامد فى الوضع القياسى للزاوية
أى أنه يمكن اضافة أى عدد من الـ ٣٦٠ للزاوية أو طرحها منها ولن يؤثر ذلك على الزاوية

٣) لمعرفة موقع الزاوية فى المستوى الاحداثى المتعامد يجب ان تنحصر بين] ٠ ، ٣٦٠ [فإذا زادت الزاوية عن ٣٦٠ يجب طرح دورة او دورتين او ثلاث دورات او اكثر

٤) عندما تكون الزاوية سالبة نضيف عدد أكبر منها وعندما تكون الزاوية موجبة نطرح منها عدد اصغر منها ولاحظ ان :
دورة واحدة = ٣٦٠
دورتين = ٢ ×٣٦٠ = ٧٢٠
ثلاث دورات = ٣×٣٦٠ = ١٠٨٠
اربعة دورات = ٤×٣٦٠ = ١٤٤٠
خمسة دورات = ٥ ×٣٦٠ = ١٨٠٠

مثال ١ : عين الربع الذى تقع فيه كلا من الزوايا الاتية
١) ٥٣٠ ٢) ١٦٧٠ ٣) -٧٤٠ ٤) – ٣٥٣٠ ٥) ٣٤٥

الحل

١) ٥٣٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح منها عدد أصغر منها وهو دورة واحدة ٣٦٠
٥٣٠ – ٣٦٠ = ١٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الثانى

٢) ١٦٧٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح عدد من الدورات الكاملة اصغر منها وهو اربعة دورات وهى ١٤٤٠
∴ θ = ١٦٧٠ – ١٤٤٠ = ٢٣٠ ∴ الزاوية فى الربع الثالث

٣) – ٧٤٠ الزاوية سالبة واصغر من الصفر لذا يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها اكبر من الزاوية وهى ٣ دورات = ١٠٨٠
θ = -٧٤٠ + ١٠٨٠ = ٣٤٠ ∴ الزاوية فى الربع الرابع

٤) – ٣٥٣٠ زاوية سالبة يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها أكبر من الزاوية وهى ١٠ دورات كاملة وهى = ٣٦٠٠
θ = -٣٥٣٠ + ٣٦٠٠ = ٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الاول

٥) ٣٤٥ زاوية موجبة تنحصر بين]٠ ، ٣٦٠ [لذا لن يتم اضافة اى عدد من الدورات الكاملة او الطرح منها
θ = ٣٤٥ زاوية تقع فى الربع الرابع

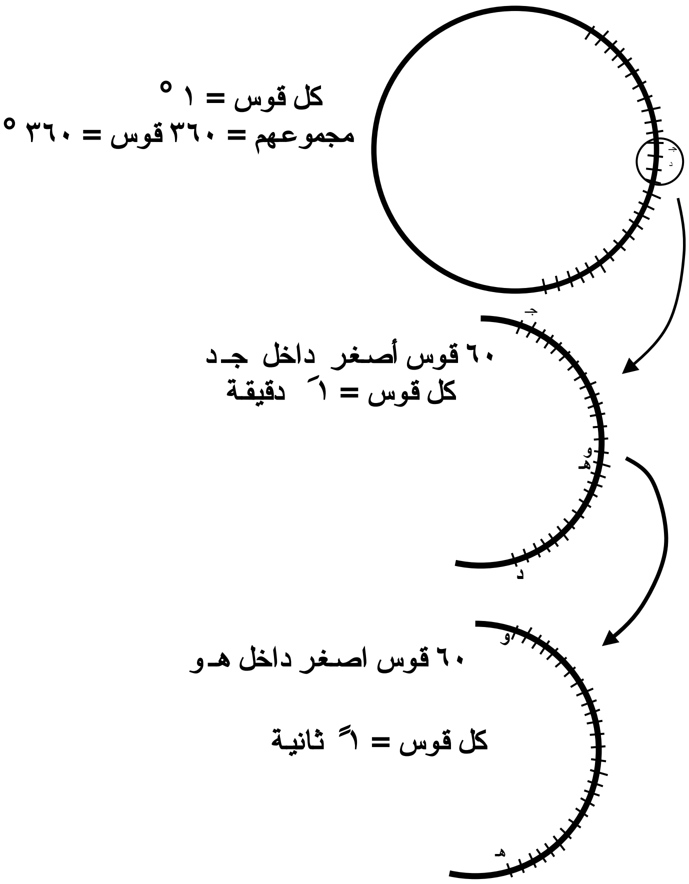
تدريب : حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الاتية
١) صفر ٢) ٣٦٠ ٣) ١٥٠٠ ٤) – ١٣٣٦
٥) -٢٣٨٥ ٦) ١٨٩٠ ٧) -١٧١٠ ٨) ٧٥٥

الحل
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

وحدات قياس الزاوية

القياس الستيني للزاوية

قام علماء الرياضيات بتقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوس متساوية كل قوس من هذة الأقواس يسمى الدرجة ويرمز له بالرمز ° ثم قاموا بتقسيم كل قوس من ال ٣٦٠ قوس إلى ٦٠ قوس أصغر كل قوس يسمى دقيقة ويرمز لها بالرمز ˊ ثم تم تقسيم هذة الأقواس إلى ٦٠ قوس أصغر تمثل الثوان ويرمز لها بـ ˝



لذا فالقياس الستينى للزاوية يشبه أو يماثل القياس الزمن للوقت فالقياس الستينى مكون من درجات وكل درجة بها ٦٠ دقيقة وكل دقيقة بها ٦٠ ثانية

وكذلك الوقت فالساعة تناظر الدرجات حيث بها ٦٠ دقيقة والدقيقة بها ٦٠ ثانية

ويجب ملاحظة أن :

١° = ٦٠ˊ ، ١ˊ = ٦٠˝ ، ١° = ٣٦٠٠˝

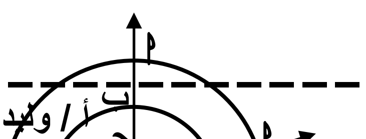
القياس الدائرى للزاوية

يعتمد هذا القياس على طول القوس من الدائرة التى تحصرة الزاوية المركزية المراد قياسها وكذلك طول نصف القطر للدائرة

حقيقة هندسية :

فى الدوائر المتحدة المركز إذا رسمت زاوية مركزية فإن النسبة بين طول القوس المقابل لهذه الزاوية المركزية إلى طول نصف قطر الدائرة المناظرة له يساوى مقدار ثابت لجميع الدوائر المتحدة المركز كالتالى :

أى أن :



$\frac{\text{أ أ}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ب ب}}{\text{ب م}} = \frac{\text{جـ جـ}}{\text{جـ م}}$ = مقدار ثابت

هذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية المركزية م أى ان القياس الدائرى للزاوية المركزية يعتمد على طول القوس المقابل لها وكذلك طول نصف قطر دائرتها فيكون

القياس الدائرى للزاوية المركزية $= \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{طول نصف قطر دائرتها}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} \Longleftarrow \boxed{\theta^{\text{ء}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}}$

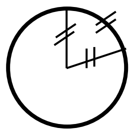
الزاوية النصف قطرية

قام علماء الرياضيات من قبل بتقسيم الدائرة الى ٣٦٠ قوس متساوى ثم كل قوس تم تقسيمة الى ٦٠ قوس اصغر ثم كل قوس اصغر تم تقسيمة الى ٦٠ قوس اصغر لنحصل من ذلك على التقدير الستينى

لكن التقدير الدائرى قام علماء الرياضيات فيه بقياس نصف قطر دائرة ما وليكن نق وقاموا بتقسيم الدائرة الى اقواس طول كلا منها = نق أى نص قطر الدائرة فوجدوا الدائرة قد قسمت الى ٦ اقواس و ٠٢٨ تقريبا من القوس

فكل زاوية قابلت اى قوس من الاقواس الستة سميت بالزاوية النصف قطرية لأن طول القوس المقابل لها = نصف قطر دائرتها

الزاوية النصف قطرية :



هى زاوية مركزيه طول القوس المقابل لها = طول نصف قطر دائرتها

وعندما يكون ل = نق فإن $\theta = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}} = 1^{\text{ء}}$

أى ان وحدة القياس الزاوية بالتقدير الدائرى هى الزاوية النصف قطرية

المعنى الحقيقى لوحدة قياس الزاوية

ما معنى قولنا أن الزاوية θ = ٢٠˝ ٣٠ˊ ٤٠°

هذا يعنى انه لدينا زاوية ما إذا وضعنا هذه الزاوية فى دائرة مقسمة الى ٣٦٠ قوس وكل قوس منهم مقسم الى ٦٠ قوس اصغر وكذلك كل قوس مقسم الى ٦٠ اخرين اصغر ووضعنا الضلع الابتدائى لهذه الزاوية على احد الاقواس التى تمثل الدرجات فإن ضلعها النهائى يكون تجاوز القوس رقم ٤٠ ولكن بعد ٣٠ قوس من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وكذلك تجاوز القوس رقم ٣٠ من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وثبت عند القوس رقم ٢٠ الذى يمثل الثوانى

اى ان قياس الزاوية بالتقدير الستينى هو معرفة كم قوس من الاقواس التى تمثل الدرجات والدقائق والثوانى ستكون مقابلة لهذه الزاوية

ما معنى قولنا أن أن الزاوية $\theta^{\text{ء}} = 1{,}5^{\text{ء}}$ زاوية نص قطرية ايضا نجد انه لدينا زاوية ما وضعناها فى الدائة المقسمة الى ٦,٢٨ من الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة بحيث ضلعها الابتدائى على بداية احد الاقواس والنهائى نجده تجاوز قوس واحد وثبت فى منتصف القوس الثانى

اى ان قياس الزاوية بالتقدير الدائرى هو معرفة كم قوس يقابل الزاوية من تلك الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة

ملاحظات مهمة :

١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة نق = وحدة الاطوال فإن قياس الزاوية بالتقدير الدائرى = طول القوس المقابل لها

٢) الزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ضعف طول قطر الدائرة يكون قياسها = ٢ ء حيث ل = ٢ نق

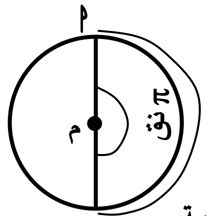
٣) الزاوية المركزية التى قياسها الدائرى = ٠,٥ ء يكون طول القوس المقابل لها = نصف طول نصف قطر الدائرة

العلاقة بين التقديرين الدائري والستيني للزاوية

المعنى الحقيقى للعلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى هو معرفة كم قوسا ستينيا وكم قوس دائريا يقابلان نفس الزاوية او بطريقة أخرى

إذا كان لدينا زاوية ما قياسها الستينى ٣٠° لذا فإنها تقابل ٣٠ قوس لتحويلها للتقدير الدائرى يجب معرفة الـ ٣٠ قوس تقابل كم من الاقواس فى النظام الدائرى ولإيجاد العلاقة بينهما لاحظ ما يأتى :

لنفرض زاوية مركزية تقابل نصف الدائرة ونوجد قياسها بالتقدير الدائرى



$$\theta^{\text{ء}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{\pi\,\text{نق}}{\text{نق}} = \pi$$

$\therefore \theta^{\text{ء}} = \pi$ ——— i

والقياس الستينى لهذه الزاوية المركزية التى تقابل نصف الدائرة = ١٨٠

أى أن

$\text{س}^{\circ} = ١٨٠$ ——— ii

وبقسمة المعادلة i على ii أو العكس نجد أن :

$$\frac{\theta^{\text{ء}}}{\text{س}^{\circ}} = \frac{\pi}{١٨٠} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{س}^{\circ}}{\theta^{\text{ء}}} = \frac{١٨٠}{\pi}$$

$$\theta^{\circ} = \frac{\theta^{\text{ء}} \times ١٨٠}{\pi} \quad \text{و} \quad \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$$

ملاحظات مهمة :

١) إذا علم قياس زاوية معينة بالتقدير الدائرى بدلالة π فإنه يتم التعويض عن π بـ ١٨٠ مباشرة دون الرجوع للقانون وإذا استخدمنا القانون سنحصل على نفس النتيجة

٢) إذا علم قياس زاوية بالتقدير الستينى وأراد قياسها بالتقدير الدائرى فإنه نوجد الزاوية بالتقدير الدائرى بدلالة π إذا لم يطلب غير ذلك

مثال ١ : أوجد القياس الدائرى لكلا من الزوايا الاتية مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

١) ٣٠ ٢) ٤٥ ٣) ٦٠ ٤) ٩٠ ٥) ١٢٠

٦) ٣٠َ ١٢٠° ٧) ٤٠ً ٥٠َ ١٠٠°

الحل

١) $\theta^{\circ} = ٣٠^{\circ}$

$$\Leftarrow \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦} = ٠,٥٢^{\text{ء}}$$

٢) $\theta = ٤٥^{\circ} \Leftarrow \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{\text{ء}} = \frac{٤٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٤} = ٠,٧٩^{\text{ء}}$$

٣) $\theta = ٩٠^{\circ}$ متروك

....

....

٤) $\theta = ٩٠ \Leftarrow \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{\text{ء}} = \frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢} = ١,٥٨^{\text{ء}}$$

٥) $\theta = ١٢٠ \Leftarrow \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{\text{ء}} = \frac{١٢٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٢\pi}{٣} = ٢,٠٩^{\text{ء}}$$

٦) $\theta = ٣٠' \; ١٢٠^{\circ} \Leftarrow \theta^{\text{ء}} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠}$

$$\theta^{\text{ء}} = \frac{٣٠' \; ١٢٠^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = ٢,١^{\text{ء}}$$

٧) $\theta = ٤٠'' \; ٥٠' \; ١٠٠^{\circ}$ متروك

مثال ٢ : أوجد القياس الستينى لكلا من الزوايا الاتية

١) ٥,٥ ٢) ٠,٨٢ ٣) ٢,٨ ٤) ١

٥) $\frac{٢\pi}{٣}$ ٦) $\frac{٤\pi}{٣}$ ٧) $\frac{٣\pi}{٢}$ ٨) $\frac{\pi}{٢}$

الحل

١) $\theta^{\text{ء}} = ٥,٥ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{\text{ء}} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{٥,٥ \times ١٨٠}{\pi} = ٣٦'' \; ٧' \; ٣١٥^{\circ}$$

٢) $\theta^{\text{ء}} = ٠,٨٢ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{\text{ء}} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٠,٨٢}{\pi} = ٥٧'' \; ٥٨' \; ٤٦^{\circ} \simeq ٤٧^{\circ}$$

٣) $\theta^{\text{ء}} = ٢,٨ \Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{\text{ء}} \times ١٨٠}{\pi}$

$$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٢,٨}{\pi} = ٤١'' \; ٢٥' \; ١٦٠^{\circ}$$

٤) بنفسك

٥) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٣} \Longleftarrow$ س° $= \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi}$

س° $= \frac{\frac{٢\pi}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{٣} = ٩٢٠$

٦) $\theta^{ء} = \frac{٤\pi}{٣} \Longleftarrow$ س° $= \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi}$

س° $= \frac{\frac{٤\pi}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٤ \times ١٨٠}{٣} = ٩٤٠$

٧) $\theta^{ء} = \frac{٣\pi}{٢} \Longleftarrow$ س° $= \frac{٣ \times ١٨٠}{٢} = ٩٧٠$

٨) $\theta^{ء} = \frac{\pi}{٢}$ بنفسك

مثال ٣ : أوجد بدلالة π القياس لكلا من الزوايا الاتية

١) ٩٣٥ ٢) ٩٨٠ ٣) ٩٦٠ ٤) ٩٧٠
٥) ٩٥٠ ٦) ٩٠٠ ٧) − ٩٧٠ ٨) − ٥٨٧٠

الحل

١) س° = ٩٣٥ $\Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta° \times \pi}{١٨٠} = \frac{١٣٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣\pi}{٤}$

٢) س° = ٩٨٠ $\Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta° \times \pi}{١٨٠} = \frac{١٨٠ \times \pi}{١٨٠} = \pi$

٣) س° = ٩٦٠ $\Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta° \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣٦٠ \times \pi}{١٨٠} = ٢\pi$

٤ ، ٥ ، ٦ متروك

٧) $\theta°$ = - ٢٧٠ + ٣٦٠ = ٩٠

$\Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta° \times \pi}{١٨٠} = \frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢}$

٨) $\theta°$ = - ٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٢١٠

$\Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{\theta° \times \pi}{١٨٠} = \frac{٢١٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٧\pi}{٦}$

مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكلا من الزوايا الموجبة الاتية

١) ٩٧٢ ٢) ٤٠ً ٣٠َ ٩٥٠ ٣) ٩٠٥
٤) ٩٥٠ ٥) ٩٧٠ ٦) ٦٠٠

الحل

١) θ = ٧٢ − ٣٦٠ = - ٢٨٨
٢) θ = ٤٠ً ٣٠َ ٩٥٠ - ٣٦٠ = - ٢٠ً ٢٩َ ٩٠٩
٣) θ = ٤٠٥ − ٣٦٠ = ٤٥ − ٣٦٠ = - ٩١٥
٤) θ = ١٥٠ − ٣٦٠ = - ٢١٠
٥ ، ٦ متروك

مثال ٥ : أوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا السالبة الاتية

١) − ٧٢ ٢) -٨٧٠ ٣) − ٣٠ً ٤٠َ ٩٠٠
٤) - ١٢٠ ٥) -٣٥٠ ٦) - ٢١٠

الحل

١) θ = -٧٢ + ٣٦٠ = ٩٨٨
٢) θ = − ٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٥٢١٠
٣) θ = − ٣٠ً ٤٠َ ٩٠٠ + ٣٦٠ = ٣٠ً ٢٠َ ٩٥٩
٤) θ = - ١٢٠ + ٣٦٠ = ٩٤٠
٥) θ = -٣٥٠ + ٣٦٠ = ٩٠
٦) بنفسك

مثال ٦ : أوجد زاويتين إحداهما قياسها موجب والاخرى قياسها سالب مكافئتين لكل زاوية من الزوايا التى قياسها

١) ١٣٥ ٢) - ٢٥ ٣) ٢٦َ ٩٧٩
٤) ٩٤٠ ٥) $\frac{١١\pi}{٨}$ ٦) $\frac{٢\pi}{٣}$

الحل

١) س = ١٣٥
الزاوية الموجبة التى تكافئها = ١٣٥ + ٣٦٠ = ٤٩٥
الزاوية السالبة التى تكافئها = ١٣٥ − ٣٦٠ = - ٢٢٥

٢) س = - ٢٥
الزاوية الموجبة التى تكافئها = -٢٥ + ٣٦٠ = ٣٣٥
الزاوية السالبة التى تكافئها = -٢٥ − ٣٦٠ = -٣٨٥

٣) بنفسك

٤) س= ٩٤٠ $\Longleftarrow \theta$ = ٩٤٠ − ٧٢٠ = ٩٢٠
∴ س = ٢٢٠
الزاوية الموجبة التى تكافئها = ٢٢٠ + ٣٦٠ = ٥٨٠
الزاوية السالبة التى تكافئها = ٢٢٠ − ٣٦٠ = -١٤٠

٥) $\theta = \frac{١١\pi}{٨}$

الزاوية الموجبة التى تكافئها $= \frac{١١\pi}{٨} + ٢\pi = \frac{٢٧\pi}{٨}$

الزاوية السالبة التى تكافئها $= \frac{١١\pi}{٨} - ٢\pi = - \frac{٥\pi}{٨}$

٦) بنفسك

مثال ٧ : أوجد القياس الستينى والدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان :

١) ل =١٢ سم ، نق=١٠ سم ٢) ل=١٤ سم ، نق=٧ سم
٣) ل= ٢π ، نق = ٨ سم ٤) ل = ٤,٥ سم ، نق=٩سم

الحل

١) $\theta = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{ء}$

$\Longleftarrow \theta° = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{١,٢ \times ١٨٠}{\pi} =$,,,,,,,,,,,

٢) $\theta = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \theta^{ء} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ء}$

$\Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{\pi} =$,,,,,,,,,,,,

٣) $\theta = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٨} = \frac{\pi}{٤}$

$\Leftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠}{٤} = ٤٥^{\circ}$

٤) بنفسك

مثال ٨ : أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها θ وطول القوس المحصور ل إذا كان :

١) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٣}$ ، ل = ٢٠ سم ٢) θ° = ١٥٠ ، ل = ٢٥ سم

٣) $\theta^{ء} = ١,٥^{ء}$ ، ل= ٣٥ سم ٤) θ° = ١٢٠ ، ل = ٢٠ سم

الحل

١) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{٢\pi}{٣} = \frac{٢٠}{نق}$

$\Leftarrow$ نق $= \frac{٣ \times ٢٠}{٢\pi} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم

٢) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ولكن $\theta^{\circ} = ١٥٠$

أى أن الزاوية بالتقدير الستينى لذا يجب تحويلها الى التقدير الدائرى $\therefore \theta^{ء} = \frac{١٥٠\pi}{١٨٠} = \frac{٥\pi}{٦}$

$\therefore \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{٥\pi}{٦} = \frac{٢٥}{نق}$

$\Leftarrow$ نق $= \frac{٦ \times ٢٥}{٥\pi} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم

٣) $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow ١,٥ = \frac{٣٥}{نق}$

$\therefore$ نق $= \frac{٣٥}{١,٥} = ٢٣,٣٣$ سم

٤) بنفسك

مثال ٩ : أوجد لأقرب جزء من عشرة طول القوس من الدائرة التى طول نصف قطرها نق ويقابله زاوية مركزية قياسها θ عندما

١) نق = ١٢,٥سم ، نق= $١,٦^{ء}$ ٢) نق= ٢٠ سم ، $\theta = ٢,٤^{ء}$

٣) نق = ١٥ سم ، س= ٦٠ ٤) نق = ٢٠ سم ، س = ٢٤٠°

الحل

١) $\therefore \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow$ ل $= \theta^{ء} \times$ نق

ل = ١٢,٥ × ١,٦ = ٢٠ سم

٢) بنفسك

٣) س = ٩٠° ولكن يجب ان تكون الزاوية بالتقدير الدائرى

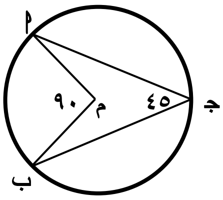
$\therefore \theta^{ء} = \frac{٦٠\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$ $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow$ ل $= \theta^{ء} \times$ نق

$\therefore$ ل $= \frac{\pi}{٣} \times ١٥ = ٥\pi = ١٥,٧$ سم

٤) بنفسك

مثال ١٠ : أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

الحل



محيط الدائرة = ٢ π نق

يجب إيجاد نصف قطر الدائرة

$\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ولإيجاد نق يجب أن يكون

معلوم لدينا ل ، $\theta^{ء}$ حيث $\theta^{ء}$

هى القياس الدائرى للزاوية المركزية

قياس الزاوية المركزية = ضعف المحيطية

المشتركة معها فى نفس القوس

حيث اننا نتعامل مع الزاوية المركزية

$\therefore \theta = ٢ \times ٤٥ = ٩٠$

$\therefore \theta^{ء} = \frac{\theta^{\circ} \times \pi}{١٨٠} = \frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢}$

$\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \frac{\pi}{٢} = \frac{١٢}{نق} \Leftarrow$ نق $= \frac{٢ \times ١٢}{\pi} = \frac{٢٤}{\pi}$

المحيط = ٢ π نق $= ٢ \times \pi \times \frac{٢٤}{\pi} = ٢ \times ٢٤ = ٤٨$ سم

مثال ١٢ : النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى هى ٢ : ٢ : ٣ : ٥ أوجد القياس الدائرى والستينى لهذه الزوايا

الحل

نفرض ان الزوايا هى على الترتيب أ ، ب ، ج ، ء

$\therefore$ ق(أ) : ق(ب) : ق(ج) : ق(ء) = ٢ : ٢ : ٣ : ٥

ق(أ) = ٢ك ق(ب) = ٢ك ق(ج) = ٣ك ق(ء) = ٥ك

ولكن مجموع زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

$\therefore$ ٢ك + ٢ك + ٣ك + ٥ك = ٣٦٠

$\Leftarrow$ ١٢ك = ٣٦٠ ك = ٣٠

$\therefore$ ق(أ) = ٢ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق(ب) = ٢ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق(ج) = ٣ك = بنفسك

ق(ء) = ٥ك = بنفسك

حول الزوايا للقياس الدائرى بنفسك

مثال ١٣ : زاويتان مجموعهما ٩٣٠ والفرق بينهما $\frac{\pi}{٦}$ أوجد

الزاويتان بالتقديران الدائرى والستينى

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص لذا فإن :

س + ص = ١٣٠ ، س – ص = $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠

س + ص = ١٣٠

س – ص = ٣٠ بالجمع

٢س = ١٦٠ ⟸ س = ٨٠°

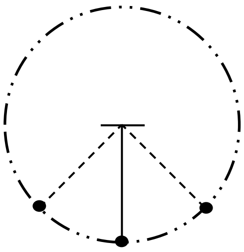
بالتعويض فى س + ص = ١٣٠ ⟸ ٨٠ + ص = ١٣٠

ص = ١٣٠ – ٨٠ = ٥٠°

مثال ١٤ : بنول يتذبذب خلال زاوية قياسها الستينى ٩٣٥

صانعا قوسا من دائرة طوله ١٢سم أوجد طول البندول

الحل



طول البندول يمثله نصف قطر الدائرة نق

الزاوية التى يتذبذب خلالها البندول هى

الزاوية المركزية

س° = ٩٣٥ بالتقدير الستينى

يجب تحويل الزاوية للتقدير الدائرى :

$\theta^{ء} = \frac{١٣٥ \times \pi}{١٨٠} = \frac{٣\pi}{٤}$

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ⟸ $\frac{٣\pi}{٤} = \frac{١٢}{نق}$

نق = $\frac{٤ \times ١٢}{٣\pi} = \frac{٤٨}{٣\pi}$ = ٥,١ سم

∴ طول البندول = ٥,١ سم

الفصل الثانى

الدوال المثلثية

الدوال المثلثية الاساسية ومقلوباتها

سبق لك دراسة الدوال المثلثية الاساسية

فالدوال المثلثية هى دوال تربط بين ضلعين فى المثلث القائم وزاوية غير القائمة وهذة الدوال هى

(١) دالة جيب الزاوية جا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية sin

(٢) دالة جيب التمام جتا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية cos

(٣) دالة ظل الزاوية ظا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية tan

والدوال السابقة دوال أساسية ومقلوباتها :

(١) دالة قاطع الزاوية قا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية sec

(٢) دالة قاطع تمام الزاوية قتا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية cosec

(٣)دالة ظل تمام الزاوية ظتا هـ
ويقابلها باللغة الإنكليزية cot

أى أن :

⊙ جا أ = $\frac{١}{\text{قتا أ}}$ $\Leftarrow$ جا أ × قتا أ = ١

⊙ جتا أ = $\frac{١}{\text{قا أ}}$ $\Leftarrow$ جتا أ × قا أ = ١

⊙ ظا أ = $\frac{١}{\text{ظتا أ}}$ $\Leftarrow$ ظا أ × ظتا أ = ١

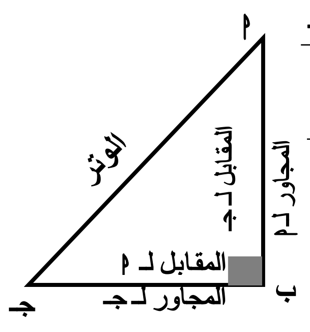
علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن أجـ وترا فى المثلث ، أ ب ، ب جـ ضلعا القائمة ويكون

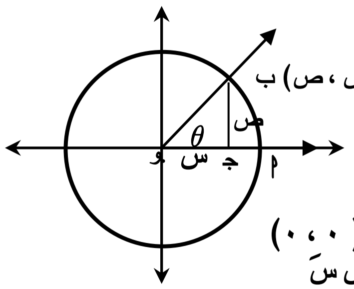
جا أ = $\frac{\text{المقابل لـأ}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

جتا أ = $\frac{\text{المجاور لـأ}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل ل أ}}{\text{المجاور ل أ}}$



دائرة الوحدة :



هى دائرة طول نصف قطرها = الوحدة
مركز هذه الدائرة هو نقطة الاصل لنظام احداثى متعامد فيكون المركز هو النقطة و = (٠ ، ٠)
ويكون المحورين هما الافقى س سَ والرأسى ص صَ أى ان :
و ب = و أ = ١ وحدة طول
ويكون هذه الدائرة فيها :

Δ وب جـ قائم الزاوية فى جـ $\Leftarrow$ (وب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (وجـ)^{٢}
وبإعتبار أن و جـ = س ، ب جـ = ص ، و ب = ١
$\therefore$ (١)^{٢} = (ص)^{٢} + (س)^{٢} $\Leftarrow$ س^{٢} + ص^{٢} = ١
$\therefore$ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ——— (١)

جا θ = $\frac{\text{ص}}{١}$ = ص $\Leftarrow$ ص = جا θ ——— (٢)

جتا θ = $\frac{\text{س}}{١}$ = س $\Leftarrow$ س = جتا θ ——— (٣)

ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظا θ ——— (٤)

قوانين دائرة الوحدة :

⊙ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ⊙ ص = جا θ

⊙ س = جتا θ ⊙ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظا θ

ملاحظات مهمة :

١) نجد أن س ، ص لا تتعدى القيمة ١ (نصف قطر دائرة الوحدة) ولا تقل عن -١ أى أن
⊙ -١ ≤ س ≤ ١ ، -١ ≤ ص ≤ ١
⊙ -١ ≤ جتا θ ≤ ١ ، -١ ≤ جا θ ≤ ١

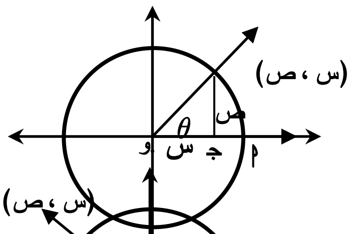
٢) إذا كانت ب (س ،ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية θ مع دائرة الوحدة فإنه يمكن التعبر عنها بالنقطة ب = (جتا θ ، جا θ)

٣) بالتعويض فى دائرة الوحدة عن س ، ص بـ جتا θ ، جا θ نجد أن :
جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ = ١ $\Leftarrow$ جتا^{٢} θ = ١ – جا^{٢} θ
$\Leftarrow$ جا^{٢} θ = ١ – جتا^{٢} θ

إشارات الدوال المثلثية

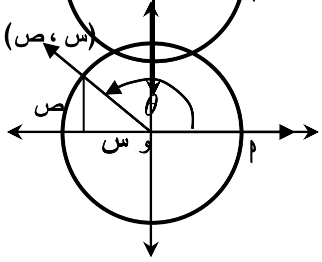
بفرض أن ∠ أ و ب زاوية موجهة فى الوضع القياسى وكانت ب (س ، ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لهذه الزاوية مع دائرة الوحدة وأن قياسها θ لذا فإن :

١] إذا كانت $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$



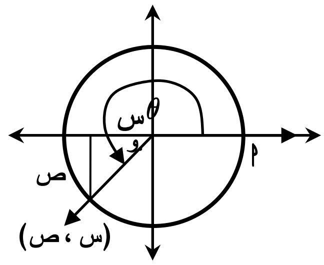
النقطة ب تقع فى الربع الاول
ويكون س > ٠ ، ص > ٠
أى ان س ، ص موجبتين
فيكون كل الدوال المثلثية موجبة

٢] إذا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$



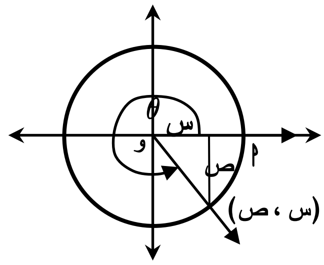
تكون النقطة ب فى الربع الثانى
ويكون س < ٠ ، ص > ٠
أى أن س سالبة وص موجبة
وبالتالى يكون جا ومعكوستها قتا فقط موجبة فى الربع الثانى

٣] إذا كانت $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$



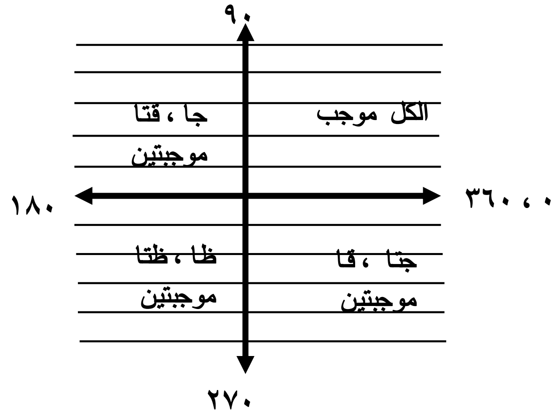
تكون النقطة ب فى الربع الثالث
ويكون س < ٠ ، ص < ٠
أى أن س وص سالبتين
وبالتالى يكون ظا ومعكوستها ظتا فقط موجبة فى الربع الثالث

٤] إذا كانت $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$



تكون النقطة ب فى الربع الرابع
ويكون س > ٠ ، ص < ٠
أى أن س موجبة وص سالبة
وبالتالى يكون جتا ومعكوستها قا فقط موجبة فى الرابع

وإشارة الدوال المثلثية تتلخص فى الشكل التالى :



مثال ١ : أبحث إشارة القيم الاتية

١) جتا ٣٥٠ ٢) ظا ١٠٠ ٣) قا ٢٦٥

٤) جتا (- ١٦٥) ٥) قتا ١٢٠٠ ٦) ظتا $\frac{٣\pi}{٢}$

٧) جا $\frac{٥\pi}{٤}$ ٨) قتا $\frac{٣\pi}{٢}$ ٩) قا (- $\frac{٢٥\pi}{٦}$)

الحل

١) جتا ٣٥٠ ⟸ ٣٥٠ زاوية تقع فى الربع الرابع حيث ٢٧٠ < ٣٥٠ < ٣٦٠ جتا فى الربع الرابع موجبه ∴ جتا ٣٥٠ =+

٢) ظا ١٠٠ ⟸ ٩٠ < ١٠٠ < ١٨٠ الزاوية فى الربع الثانى ظا فى الربع الثانى سالبة ∴ ظا ١٠٠ = -

٣) قا ٢٦٥ ⟸ ١٨٠ < ٢٦٥ < ٢٧٠ الزاوية فى الربع الثالث قا فى الربع الثالث سالبة لأنها معكوسة جا ∴ قا ٢٦٥ = -

٤) جا(-١٦٥) ⟸ س° = - ١٦٥ + ٣٦٠ = ١٩٥
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبه ∴ جا(-١٦٥) = -

٥) قتا ١٢٠٠ ⟸ θ = ١٢٠٠ – ١٠٨٠ = ١٢٠
الزاوية تقع فى الربع الثانى
قتا فى الربع الثانى موجبة لأنهما معكوسة جا ∴ قتا ١٢٠٠ = +

٦) ظتا $\frac{٣\pi}{٢}$ ⟸ $\theta = \frac{٣\pi}{٢} = \frac{٣ \times ١٨٠}{٢} = ٢٧٠$
الزاوية محورية لا تقع فى اى ربع لذا فإن ظتا ٢٧٠ غير معروفة الاشارة

٧) جا $\frac{٥\pi}{٤}$ ⟸ $\theta = \frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠}{٤} = ٢٢٥$
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبة ⟸ ∴ جا ٢٢٥ = -

٨ ، ٩ بنفسك

مثال ٢ : إذا كانت θ هى قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى الحالات الاتية

١) ب(٠,٦ ، ص) ، ص > ٠ ٢) ب(س ، - ٠,٨) ، س < ٠

٣) ب(- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

٤) ب (٩أ ، ١٢أ) ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$

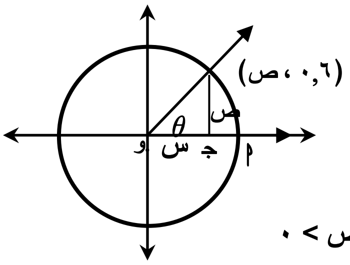
٥) ب (-١ ، ص) ٦) ب(-ل ، ل) ، ل < ٠

الحل

١) ب(٠,٦ ، ص) ، ص> ٠ س > ٠ ، ص > ٠

∴ الزاوية θ فى الربع الاول

ومن دائرة الوحدة



س² + ص² = ١

(٠,٦)² + ص² = ١

٠,٣٦ + ص² = ١

ص² = ١ − ٠,٣٦ = ٠,٦٤

ص = $\sqrt{٠,٦٤}$ = ±٠,٨ ولكن ص > ٠

∴ ص = ٠,٨

∴ ص = جا θ = ٠,٨ ، س = جتا θ = ٠,٦

فيكون :

∴ جا θ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ⟸ قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ قا θ = $\frac{٥}{٣}$

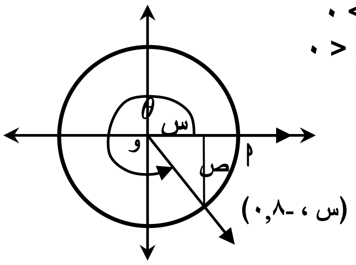
ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$ ⟸ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

٢) ب(س ، -٠,٨) ، س > ٠

عندما يكون س > ٠ ، ص < ٠

تكون θ فى الربع الرابع

من قانون دائرة الوحدة



س² + ص² = ١

س² + (-٠,٨)² = ١

س² + ٠,٦٤ = ١

س² = ١ − ٠,٦٤ = ٠,٣٦

س² = ٠,٣٦ ⟸ س = $\sqrt{٠,٣٦}$ = ± ٠,٦

ولكن س > ٠ ∴ س = ٠,٦

∴ جا θ = ص = -٠,٨ = $-\frac{٨}{١٠} = -\frac{٤}{٥}$

∴ جتا θ = س = ٠,٦ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ظا θ = $\frac{ص}{س} = -\frac{٤}{٣}$

فيكون :

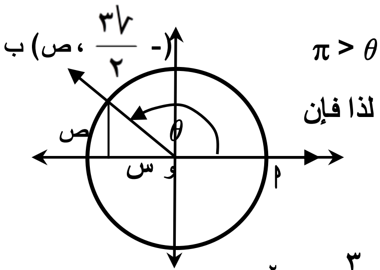
∴ جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{٣}{٤}$

٣) ب($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢}$ < θ < π

الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠ لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثانى

ومن قانون دائرة الوحدة :



س² + ص² = ١

($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)² + ص² = ١ ⟸ $\frac{٣}{٤}$ + ص² = ١

⟸ ص² = ١ - $\frac{٣}{٤} = \frac{٤ - ٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

⟸ ص = $\sqrt{\frac{١}{٤}} = \pm\frac{١}{٢}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن ص موجبة ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، س = جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{ص}{س}$ = ظا θ = $\frac{١}{٢} \div -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

فيكون :

∴ جا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

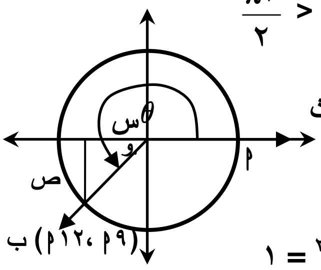
قتا θ = $\frac{٢}{١}$ ، قا θ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ظتا θ = $-\sqrt{٣}$

٤) ب (٩م ، ١٢م) ، π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$

الزاوية تنحصر بين ١٨٠ ، ٢٧٠

لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثالث

ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :



س² + ص² = ١

(٩م)² + (١٢م)² = ١

٨١ م² + ١٤٤م² = ١ ⟸ ٢٢٥ م² = ١

∴ م² = $\frac{١}{٢٢٥}$ ⟸ م = $\sqrt{\frac{١}{٢٢٥}}$ = ± $\frac{١}{١٥}$

ولكن س = ٩ م وإشارتها تعتمد على اشارة م

وإشارة س فى الربع الثالث سالبة لذا لابد أن تكون م سالبة

∴ م = $-\frac{١}{١٥}$

∴ ص = ١٢ م = ١٢ × $-\frac{١}{١٥} = -\frac{١٢}{١٥} = -\frac{٤}{٥}$ = جا θ

∴ س = ٩ م = ٩ × $-\frac{١}{١٥} = -\frac{٩}{١٥} = -\frac{٣}{٥}$ = جتا θ

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{١٢م}{٩م} = \frac{٤}{٣}$ = ظا θ

فيكون :

جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $-\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $-\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

٥) ب (-١ ، ص)

النقطة ب مسقطها السينى = ١ لذا فإن الزاوية θ لا تقع فى اى ربع لأنها زاوية ربعية (محورية)

من قانون دائرة الوحدة ⟸ س² + ص² = ١

(-١)² + ص² = ١ ⟸ ١ + ص² = ١

ص² = ١ − ١ = صفر ⟸ ص = صفر

س= -١ = جتا θ ، ص = ٠ = جا θ ، $\frac{ص}{س} = \frac{٠}{-١}$ = ظا θ

فيكون :

جا θ = ٠ ، جتا θ = -١ ظا θ = صفر

قتا θ = غير معرف قا θ = -١ ظتا θ = غير معرف

٦) ب(-ل ، ل) ، ل > ٠ بنفسك

مثال ٢ : اوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى كلا من الحالات الاتية

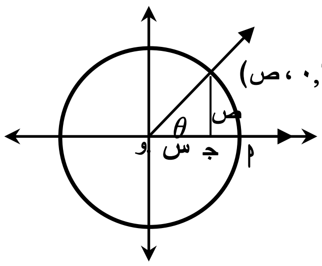
١) $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، جتا θ=٠,٦   ٢) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ،ظا θ= $-\frac{٣}{٤}$

٣) $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، قا θ=٢   ٤) $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ ،قتا θ= $-\frac{٢٥}{٧}$

٥) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، جا θ= $\frac{١٢}{١٣}$

الحل

١) $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، جتا θ=٠,٦



الزاوية تقع فى الربع الاول
لأنها تنحصر بين ٠ ، ٩٠
جتا θ = س = ٠,٦
∴ النقطة ب = (٠,٦ ، ص)
ومن دائرة الوحدة
س^{٢} + ص^{٢} = ١
(٠,٦)^{٢} + ص^{٢} = ١
٠,٣٦ + ص^{٢} = ١
ص^{٢} = ١ – ٠,٣٦ = ٠,٦٤
ص = $\sqrt{٠,٦٤}$ = ±٠,٨ ولكن ص > ٠
∴ ص = ٠,٨
∴ ص = جا θ = ٠,٨ ، س = جتا θ = ٠,٦

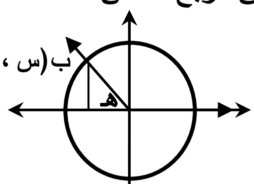
فيكون :

∴ جا θ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ $\Longleftarrow$ قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ $\Longleftarrow$ قا θ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$ $\Longleftarrow$ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

٢) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ الزاوية تقع فى الربع الثانى



ظاهـ = $-\frac{٣}{٤} = \frac{ص}{س}$

∴ س = -٤ك ، ص = ٣ك
من دائرة الوحدة :
س^{٢} + ص^{٢} = ١ $\Longleftarrow$ (-٤ك)^{٢} + (٣ك)^{٢} = ١

١٦ك^{٢} + ٩ك^{٢} = ١ $\Longleftarrow$ ٢٥ك^{٢} = ١ $\Longleftarrow$ ك^{٢} = $\frac{١}{٢٥}$

∴ ك = $\sqrt{\frac{١}{٢٥}}$ = ± $\frac{١}{٥}$ ولكن الزاوية فى الربع الثانى

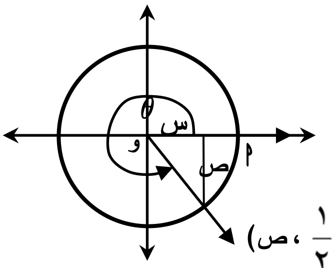
والمسقط السينى سالب س = -٤ك ∴ ك = $\frac{١}{٥}$

∴ جتاهـ = س = -٤ك = -٤× $\frac{١}{٥}$ = $\frac{-٤}{٥}$ $\Longleftarrow$ قاهـ =

∴ جاهـ = ص = ٣ك = ٣× $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ $\Longleftarrow$ قتاهـ =

ظاهـ = بنفسك

٣) $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، قا θ=٢



∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ $\Longleftarrow$ س= $\frac{١}{٢}$

الزاوية تقع فى الربع الرابع
لأنها تنحصر بين ٢٧٠ ، ٣٦٠
ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :

س^{٢}+ص^{٢} = ١ $\Longleftarrow$ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ + ص^{٢} = ١ $\Longleftarrow$ $\frac{١}{٤}$ + ص^{٢} = ١

ص^{٢} = ١ - $\frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$ $\Longleftarrow$ ص = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وحيث أن الزاوية فى الربع الرابع نجد أن ص =

∴ جا θ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{-\sqrt{٣}}{١}$

قتا θ =   قا θ =   ظتا θ =

٤)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

٥)

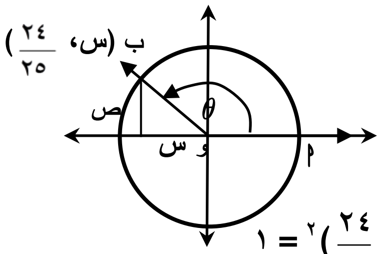
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٤ : إذا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، جا $\theta = \frac{24}{25}$ أوجد قيمة :

١) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta}$ ٢) جتا θ − قتا θ ظا θ

٣) قتا θ جا θ − ظا θ ظتا θ + جتا$^2\theta$

الحل



الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠

لذا فإنها تقع فى الربع الثانى

جا $\theta = \frac{24}{25} =$ ص

ومن قانون دائرة الوحدة :

س^2 + ص^2 = ١ ⟸ س$^2 + (\frac{24}{25})^2 = 1$

س$^2 + \frac{576}{625} = 1$ ⟸ س$^2 = 1 - \frac{576}{625} = \frac{625-576}{625} = \frac{49}{625}$

∴ س$^2 = \frac{49}{625}$ ⟸ س $= \sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن س < ٠ (سالبة)

∴ س $= -\frac{7}{25}$

∴ جا $\theta = \frac{24}{25}$ ، جتا $\theta = -\frac{7}{25}$ ، ظا $\theta =$

قتا $\theta = \frac{25}{24}$ ، قا $\theta = -\frac{25}{7}$ ، ظتا $\theta = -\frac{7}{24}$

١) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta} = \frac{(-\frac{7}{24})-(\frac{25}{24})}{(-\frac{24}{7})-(-\frac{25}{7})} = \frac{(\frac{-7-25}{24})}{(\frac{-24+25}{7})}$

$= \frac{(-\frac{32}{24})}{(\frac{1}{7})} = \frac{(-\frac{4}{3})}{(\frac{1}{7})} = \frac{-4\times7}{3\times1} = \frac{-28}{3}$

٢) جتا θ − قتا θ ظا $\theta = -\frac{7}{25} - \frac{25}{24} \times -\frac{24}{7} = -\frac{7}{25} + \frac{25}{7}$

$= \frac{-7\times7+25\times25}{25\times7} = \frac{-49+625}{175} = \frac{576}{175}$

٣) بنفسك

....

....

....

....

....

....

....

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزوايا الخاصة :

هى تلك الزوايا المحورية (الربعية) وتلك الزوايا التى لها قيم معروفة مع جميع الدوال المثلثية

فالزوايا الحدية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }

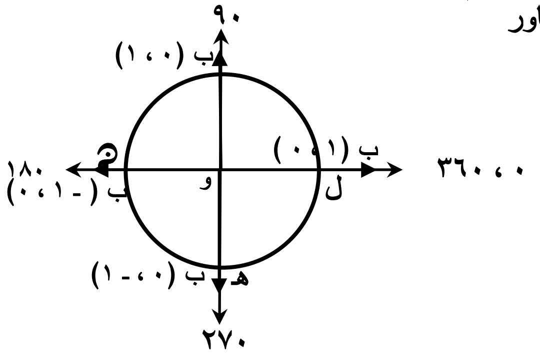
والزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

وكذلك كل زاوية تنتج من حاصل جمع او طرح الزوايا المحورية والزوايا الخاصة فهى ايضا زاوية خاصة أو زاوية مشهورة ولكن قيمها مع الدوال المثلثية سنتطرق له فى الدرس القادم

فما هى قيمة النسب المثلثية لهذه الزوايا المحورية والخاصة وللإجابة على هذا السؤال تتبع ما يأتى :

أولا الزوايا المحورية (الربعية)

بفرض أن الضلع النهائى للزاوية θ تقاطع مع دائرة الوحدة فى النقاط ل ، م ، هـ ، ك وهى نفسها نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحاور



١) إذا كان الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ل

١) تكون الزاوية θ = صفر

٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع هذا الضلع النهائى هى ب = (١ ، ٠) = (س ، ص) = (جتا θ ، جا θ)

لذا فإن :

جا ٠ = ٠ جتا ٠ = ١ ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف قا ٠ = ١ ظتا ٠ = غير معرف

٢) إذا كان الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة م

١) تكون الزاوية θ = ٩٠

٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ هى ب = (٠ ، ١) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ٩٠ = ١ جتا ٩٠ = ٠ ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١ قا ٩٠ =غير معرف ظتا ٩٠ = ٠

٣) إذا كان الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ك

١) تكون الزاوية θ = ١٨٠

٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ هى ب = (-١ ، ٠) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ١٨٠ =٠ جتا ١٨٠ = -١ ظا ١٨٠ = ٠

قتا ١٨٠ =غير معرف قا ١٨٠ =-١ ظتا١٨٠= غير معرف

٤] إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة هـ

١) تكون الزاوية θ = ٢٧٠

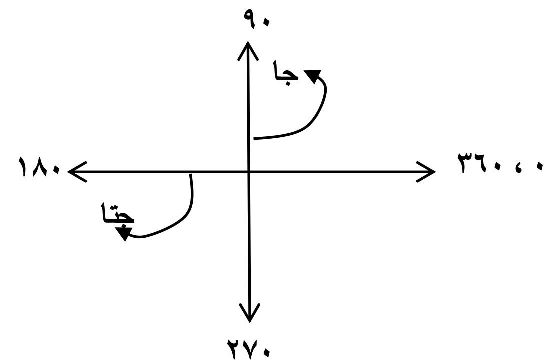
٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ هى ب = (٠ ، -١) = (س ، ص) = (جتا θ ، جا θ)

لذا فإن :

جا ٢٧٠ = -١ جتا ٢٧٠ = ٠ ظا ٢٧٠ = غير معرف

قتا ٢٧٠ = -١ قا ٢٧٠ = غير معرف م ظتا ٢٧٠ = ٠

ملخص لما سبق



المحور س يمثل جتا لذا فإن

⊙ الدالة جتا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } ناتجها ١ أو -١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب

⊙ الدالة جتا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها صفر

المحور ص يمثل جا لذا فإن :

⊙ الدالة جا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها ١ أو -١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب

⊙ الدالة جا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } ناتجها صفر

الدالة ظا

⊙ الدالة ظا مع الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ قيمتها غير معرفة

أختبر نفسك :

جتا ٩٠ = جا ٠ = قتا ١٨٠ = قا ٢٧٠ =

ظا ٩٠ = ظا ٠ = جتا ٠ = جتا ١٨٠ =

قا ٠ = قا ١٨٠ = جتا ٣٦٠ = ظا ٣٦٠ =

ثانيا الزوايا الخاصة { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

نعلم من دراستنا فى الصفوف الاعدادية وبمساعدة نظرية فيثاغورث أن :

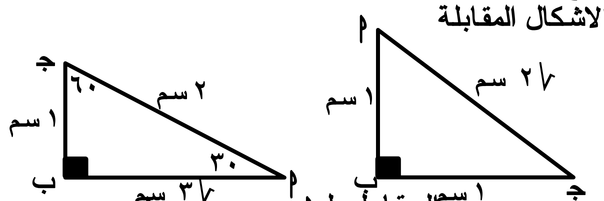
فى المثلث القائم الزاوية

١) الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

٢) الضلع المقابل للزاوية ٦٠ = نصف الوتر مضروبا فى $\sqrt{٣}$

٣) الضلع المقابل للزاوية ٤٥ = نصف الوتر مضروبا فى $\sqrt{٢}$

لاحظ الاشكال المقابلة



جا ٣٠ = جا أ = $\frac{\text{المقابل لـ أ}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا ٣٠ = جتا أ = $\frac{\text{المجاور لـ أ}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠ = ظا أ = $\frac{\text{المقابل ل أ}}{\text{المجاور ل أ}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

وبالمثل نجد أن :

جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

وبالمثل مع الزاوية ٤٥ نجد أن :

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥ = ١

ويتلخص ما سبق فى الاتى :

	٣٠	٦٠	٤٥
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

مثال ١ : أوجد قيم جميع الزوايا المثلثية للزوايا الاتية :

١) ٣٠ ٢) ٤٥ ٣) ٦٠ ٤) صفر

٥) ٩٠ ٦) ١٨٠ ٧) ٢ π ٨) $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

١) الزاوية ٣٠

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قتا ٣٠ = قا ٣٠ = ظتا ٣٠ =

٢) الزاوية ٤٥

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ظا ٤٥ = ١

قتا ٤٥ = قا ٤٥ = ظتا ٤٥ =

٣) الزاوية ٦٠ بنفسك

٤) الزاوية صفر

جا ٠ = ٠ جتا ٠ = ١ ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف قا ٠ = ١ ظتا ٠ = غير معرف

٥) الزاوية ٩٠

جا ٩٠ = ١ جتا ٩٠ = ٠ ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١ قا ٩٠ = غير معرف ظتا ٩٠ = ٠

باقى الزوايا بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة ما يأتى :

١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠

٢) ظا^{٢} ٦٠ – قا^{٢} ٦٠ + جا ٩٠

٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ - ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{٢}$ جا ٤٥ جا ٩٠

٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا^{٢} ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

٦) ٤ جا٣٠ جا ٩٠ – جتا٠ قا ٦٠ + ٥ ظا ٤٥
+ ١٠ جتا٤٥^{٢} جا٢٧٠ - ظا٣٠ جا ١٨٠

الحل

١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠
$= \cancel{١} + ٠ + (-\cancel{١}) + ٠ + ١ = ١$

٢) ظا^{٢} ٦٠ – قا^{٢} ٦٠ + جا ٩٠ = $(\sqrt{٣})^{٢} – (٢)^{٢} + ١$
= ٣ – ٤ + ١ = صفر

٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ - ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$ = قا٣٠ ظا ٦٠ – ظتا ٦٠ جتا ٣٠

$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \sqrt{٣} - \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢ - \frac{١}{٢} = \frac{٤-١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{٢}$ جا ٤٥ جا ٩٠

$\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} \times \frac{١}{٢} + \cancel{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}} \times ١$

$= \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$

٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا^{٢} ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

$= ٠ \times ٢ + (\sqrt{٢})^{٢} \times \frac{١}{٢} - ٠ \times ٠ = ٠ + ٢ \times \frac{١}{٢} + ٠ = ١$

٦) بنفسك

مثال ٢ : أثبت صحة المتطابقات الاتية

١) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

٢) قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا^{٢} ٦٠ - ظا^{٢} ٤٥ = $\frac{٧}{٣}$

٣) جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥ = $\frac{١}{٢}$

٤) ٢جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١٠

٥) جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥ = $\frac{١}{٤}$

٦) قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠ = قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠

٧) ٢ جتا^{٢} ٤٥ – ١ = ١ – ٢ جا^{٢} ٤٥

٨) ظا ٦٠ = $\frac{٢ظا٣٠}{١-ظا^{٢}٣٠}$

٩) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

الحل

١) الايمن = ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = $٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ١$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$ = الايسر

٢) الايمن = قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا^{٢} ٦٠ - ظا^{٢} ٤٥

$= \frac{٢}{\cancel{\sqrt{٣}}} \times \cancel{\sqrt{٣}} + (\frac{٢}{\sqrt{٣}})^{٢} – (١)^{٢} = ٢ + \frac{٤}{٣} - ١ = ١ + \frac{٤}{٣}$

$= ١ + \frac{٤}{٣} = \frac{٣+٤}{٣} = \frac{٧}{٣}$ = الايسر

٣) الايمن = جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥ =

= جا ٣٠ - جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥ = $\frac{\cancel{١}}{٢} - \frac{\cancel{١}}{٢} + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = \frac{١}{٢}$

= الايسر

٤) الايمن = ٢جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ =

= ٢ جتا^{٢} ٦٠ + ٣ جا^{٢} ٤٥ + ٤ ظا^{٢} ٦٠ – ٤ جا ٩٠

$= ٢ (\frac{١}{٢})^{٢} + ٣ (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + ٤ (\sqrt{٣})^{٢} – ٤ \times ١$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} + ٣ \times \frac{١}{٢} + ٤ \times ٣ – ٤ = \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + ١٢ – ٤$

$= \frac{١+٣}{٢} + ٨ = \frac{٤}{٢} + ٨ = ٢ + ٨ = ١٠$ = الايسر

٥) الايمن = جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥

$= (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} \times ١ = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٤}$ = الايسر

٦) الايمن :
قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠ = $(٢)^{٢} – (\sqrt{٣})^{٢} – (-١)$
=٤ - ٣ + ١ = ٤ - ٢ = ٢

الايسر :
قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠ = $(\sqrt{٢})^{٢} \times -١ \times -١ = ٢$
يساوى الايسر

٧) ، ٨) ، ٩) بنفسك

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٤ : أوجد قيمة س التى تحقق :

١) س جا² $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا² $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

٢) س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ = ظا² $\frac{\pi}{٤}$ - جتا $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

١) الايمن :

س جا² $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا² $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

س × جا² ٤٥ × جتا ١٨٠ = ظا² ٦٠ × جا ٢٧٠

س × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢$ × $\cancel{-١}$ = $(\sqrt{٣})^٢$ × $\cancel{-١}$ $\Longleftarrow$ س × $\frac{١}{٢}$ = ٣

س = ٣ × ٢ = ٦

٢) تدريب

....

....

....

....

....

....

....

مثال ٥ : إذا كانت س $\in$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] أوجد قيمة س التى تحقق ما يلى :

١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

٢) ٣ ظا² س = ٤ جا² $\frac{\pi}{٦}$ + ٨ جتا² $\frac{\pi}{٣}$

٣) جتاس = $\frac{\text{جا٦٠}}{\text{جا٩٠}}$ - $\frac{\text{جا٠}}{\text{جا٤٥}}$

الحل

١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

∴ جا س = ١ $\Longleftarrow$ س = ٩٠°

....

....

....

....

....

....

....

بعض خواص الدوال المثلثية

الدوال المثلثية لها خواص تميزها عن باقى الدوال المسترسلة فلها خواص مشتركة وكل دالة لها خواص منفردة وبعض هذه الخواص نسردها فيما يلى :

١] الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها 2π

الدالة تكون دورية إذا كانت د(س) = د(س + هـ) وتكون دورتها = هـ ولذلك فإن الدوال المثلثية دوال دوريه لأن على سبيل المثال يكون جا θ = جا (θ + ٢π) لذا فإن الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها ٢ π

٢] مدى الدالتين جاθ ، جتاθ = [-١،١]

أى انه بالنسبة للدالتين جا ، جتا لا يمكن أن تتعدى قيمة كلا منهما عن ١ ولا يمكن أن تقل عن – ١ أما باقى الدوال المثلثية فلا ينطبق عليها ذلك

٣] الزوايا السالبة للدوال جا ، جتا ، ظا

من خصائص هذه الدوال التى سنتعرف عليها فى هذا الدرس أن

جا (-θ) = -جا θ ⟸ جا – ٣٠ = -جا ٣٠

جتا(-θ) = جتا θ ⟸ جتا (-٣٠٠) = جتا ٣٠٠

ظا (-θ) = -ظا θ ⟸ ظا – ٣٠ = -ظا ٣٠

٤] الدالة العكسية للدالة المثلثية

إذا كان جا θ = م ⟸ θ = جا$^{-1}$ م

ومعنى ذلك انه وبإعتبار θ الزاوية محل الدراسة وأن م قيمة جيب هذه الزاوية

فإن مهمة الدالة المثلثية جا مع الزاوية θ هو إيجاد القيمة م

أى أن إذا علمنا زاوية معينة فإننا نستطيع أن نوجد قيمة جيبها او جيب تمامها أو ظلها فماذا إذا علمنا قيمة جيب زاوية غير معلومة فهل نستطيع إيجاد هذه الزاوية

ولكى نستطيع ان نوجد هذه الزاوية لا بد ان يكون لدينا دالة مثلثية عكسية للجيب والتى تكون جا$^{-1}$

فمثلا : إذا كانت جا θ = ٠,٥ ⟸ θ = جا$^{-1}$ ٠,٥ = ٣٠

الزوايا المنتسبة

قبل ان نتعرف على الزوايا المنتسبة نراجع سويا

الزوايا المحورية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }

الزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

الزوايا المنتسبة

هى تلك الزوايا التى تكون على هيئة حاصل جمع او طرح زاوية محورية وزاوية خاصة اى تكون كالتالى

١٢٠ = ٩٠ + ٣٠ أو = ١٨٠ – ٦٠

٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ أو = ٢٧٠ – ٣٠

٣١٥ = ٣٦٠ – ٤٥ أو = ٢٧٠ + ٤٥

وهكذا وإذا استخدمنا جميع الزوايا المحورية بالاضافة او بالطرح منها مع جميع الدوال الخاصة سينتج ما يسمى بالزوايا المنتسبة وهى زوايا مشهورة

نتسائل الان ؟

هل يمكن تحديد قيمة مثلا لـ جا ١٢٠ وما علاقتها بالقيمة جا ٣٠ أو جا ٦٠ حيث أن ١٢٠ = ١٨٠ – ٦٠ = ٩٠ + ٣٠ كل ذلك سنتعرف عليه فيما يلى :

خطوات إيجاد قيمة الزوايا المنتسبة:

١) زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } تغير الدوال المثلثية

جا ⟸ جتا ، جتا ⟸ جا

قا ⟸ قتا ، قتا ⟸ قا

ظا ⟸ ظتا ، ظتا ⟸ ظا

أما زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } فلا تغير الدوال المثلثية

٢) كل ما تفعله الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ انها تغير الدالة المثلثية كما سبق ولكن تبقى على الزاوية θ كما هى ولكن الاشارة للقيمة الجديدة حسب إشارة الدالة بموقع الزاوية كالتالى :

⊙ جا (٩٠ + θ) = جتا θ

تغيرت إلى جتا لأن ٩٠ زاوية تغير الدالة المثلثية

وإشارتها موجبة لأن ٩٠ + θ زاوية فى الربع الثانى وجا فى الربع الثانى موجبة

⊙ ظا (٣٦٠ – θ) = -ظا θ الدالة بقيت ظا كما هى لأن ٣٦٠ زاوية سينية لا تغير الدالة المثلثية ولكن الاشارة تغيرت لأن الزاوية ٣٦٠ – θ زاوية فى الربع الرابع و ظا فى الربع الرابع سالبة

وهكذا مع اى زاوية واى دالة مثلثية

أمثلة توضيحية

١) جا(٩٠+θ)

الزاوية ٩٠ + θ تقع فى الربع الثانى وجا فى الربع الثانى موجبة

٩٠ تغير الداة المثلثية جا ⟸ جتا

∴ جا(٩٠+θ) = جتا θ

٢) جتا(١٨٠+θ)

الزاوية ١٨٠+θ تقع فى الربع الثالث وجتا فى الربع الثالث سالبة

١٨٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جتا(١٨٠+θ) = -جتاθ

٣) قتا(٢٧٠ –θ)

الزاوية ٢٧٠ – θ تقع فى الربع الثالث وقتا فى الثالث سالبة

٢٧٠ تغير الدالة المثلثية قتا ⟸ قا

∴ قتا(٢٧٠-θ) = -قاθ

٤) جا(-θ) = جا(٣٦٠ – θ)

الزاوية – θ أو ٣٦٠ – θ تقع فى الربع الرابع

و جا فى الربع الرابع سالبة

٣٦٠ أو ٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جا(-θ) = جا(٣٦٠ – θ) = -جا θ

٥) ظا(-٩٠+θ)

ظا(-٩٠+θ) = ظا (-٩٠+θ+ ٣٦٠) = ظا(٢٧٠+θ)

الزاوية ٢٧٠ + θ فى الربع الرابع وظا فيه سالبة

٢٧٠ تغير الدوال المثلثية

∴ ظا(-٩٠+θ) = ظا(٢٧٠+θ) = -ظتاθ

طريقة أخرى :

ظا(-٩٠+θ) = ظا{-(٩٠ – θ) } = -ظا(٩٠-θ)= - ظتا θ

مثال ١ : أوجد قيمة كلا مما يأتى

١) جا٢٤٠   ٢) جتا ٥٧٠   ٣) ظا(-١٥٠)

٤) جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ ٥) قا $\frac{١٥\pi}{٤}$ ٦) ظا $\frac{١٤\pi}{٣}$

الحل

١) جا ٢٤٠

اولا نحدد موقع الزاوية ٢٤٠ وهى فى الربع الثالث

∴ ٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠   أ، ٢٤٠ = ٢٧٠ – ٣٠

∴جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = -جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴جا ٢٤٠ = جا(٢٧٠-٣٠) = -جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) جتا٥٧٠

الزاوية اكبر من ٣٦٠ ∴ θ = ٥٧٠ – ٣٦٠ = ٢١٠

الزاوية تقع فى الربع الثالث

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠   أ، ٢١٠ = ٢٧٠ – ٦٠

∴ جتا٢١٠ = جتا(١٨٠+٣٠) = -جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴جتا٢١٠ = جتا (٢٧٠-٦٠) = -جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٣) ظا(-١٥٠) = ظا(-١٥٠ + ٣٦٠) = ظا ٢١٠

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠   أ، ٢١٠ = ٢٧٠ – ٦٠

∴ظا٢١٠ = ظا(١٨٠+٣٠) =

∴ظا ٢١٠ = ظا(٢٧٠-٦٠) =

٤) جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ ⟸ θ = $\frac{٥ \times ١٨٠}{٣}$ = ٣٠٠

٣٠٠ تقع فى الربع الرابع

∴ ٣٠٠ = ٣٦٠ – ٦٠   أ، ٣٠٠ = ٢٧٠ + ٣٠

∴جتا ٣٠٠ = جتا(٣٦٠-٦٠) =

∴جتا ٣٠٠ = جتا(٢٧٠ + ٣٠) =

٥)

....

....

....

....

٦)

....

....

....

....

مثال ٢ : إذا كانت θ قياس زاوية حادة موجبة فى وضع قياسى وتعين على دائرة الوحدة النقطة ب($\frac{٣}{٥}$ ، ص) أوجد قيمة :

١) ظا(٩٠-θ)+قا(٩٠-θ)

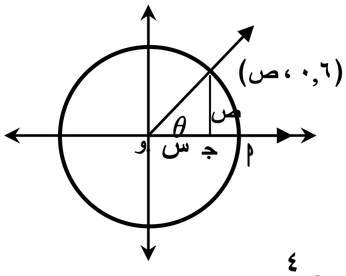
٢) ظتا(٢٧٠ +θ) –ظا(٩٠+θ) –جا (١٨٠+θ)

٣) جا(٩٠+θ) + جتا(١٨٠-θ)

الحل

لأي نقطة على دائرة الوحدة يكون

س^{٢} +ص^{٢} = ١



($\frac{٣}{٥}$)^{٢} +ص^{٢} = ١

ص^{٢} = ١ - $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٢٥ - ٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

ص^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$ ⟸ ص = $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$ = ± $\frac{٤}{٥}$

ولكن ص فى الربع الاول موجبة ⟸ص = $\frac{٤}{٥}$

∴جا θ = $\frac{٤}{٥}$ جتاθ = $\frac{٣}{٥}$ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

١) ظا(٩٠-θ)+قا(٩٠-θ) =ظتاθ + قتاθ

= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٣ + ٥}{٤}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

٢) ظتا(٢٧٠ +θ) –ظا(٩٠+θ) –جا (١٨٠+θ)

= -ظا θ - (-ظا θ) – (-جا θ)

= -ظا θ + ظا θ + جا θ + جا θ = $\frac{٤}{٥}$

٣) جا(٩٠+θ) + جتا(١٨٠-θ)

= جتا θ - جتا θ = صفر

مثال ٣ : إذا كان جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$ ∀ ∋] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [أوجد :

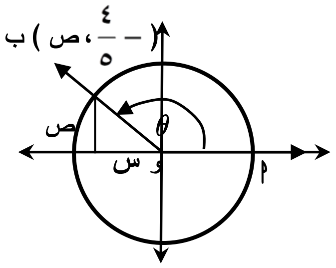
١) جا(١٨٠-θ)   ٢) قا(٣٦٠-θ)   ٣) جتا(-θ)

٤) ظا(θ – ١٨٠)   ٥) جتا(١٨٠+θ) –ظتا(٢٧٠+θ)

الحل

لأي نقطة على دائرة الوحدة يكون

س^{٢} +ص^{٢} = ١



(- $\frac{٤}{٥}$)^{٢} +ص^{٢} = ١

$\frac{١٦}{٢٥}$ +ص^{٢} = ١

⟸ ص^{٢} = ١ - $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{٢٥ - ١٦}{٢٥}$ = $\frac{٩}{٢٥}$

ص = $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$ = ± $\frac{٣}{٥}$ ⟸ ص فى الربع الثانى موجبة

∴ص = $\frac{٣}{٥}$

∴جا θ = $\frac{٣}{٥}$ جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$ ظا θ = - $\frac{٣}{٤}$

١) جا(١٨٠-θ) = جا θ = $\frac{٣}{٥}$

٢) قا(٣٦٠-θ) = قا θ = - $\frac{٥}{٤}$

٣) جتا(-θ) = جتا θ = - $\frac{٤}{٥}$

٤) ظا(θ- ١٨٠) = ظا(θ - ١٨٠+٣٦٠) = ظا(١٨٠+θ)

= ظا θ = - $\frac{٣}{٤}$

٥) جتا(١٨٠+θ) - ظتا(٢٧٠+θ)

= - جتا θ - { - ظا θ } = - جتا θ + ظا θ

= - (- $\frac{٤}{٥}$) + (- $\frac{٣}{٤}$) = $\frac{٤}{٥}$ - $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٦-١٥}{٢٠}$ = $\frac{١}{٢٠}$

مثال ٤ : أوجد قيمة

١) جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا٣٣٠ + جتا ٤٢٠

٢) جتا٢١٠ جا ٥١٠ - جا٣٣٠ جتا(-٣٣٠)

الحل

١) نوجد كل نسبة على حداها

⊙ جتا١٢٠ = جتا(١٨٠- ٦٠) = - جتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$

⊙ ظا٢٢٥ = ظا(١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١

⊙ قتا ٣٣٠ = قتا(٣٦٠ - ٣٠) = - قتا ٣٠ = - ٢

⊙ جتا ٤٢٠ = جتا(٤٢٠ - ٣٦٠) = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

∴ جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا٣٣٠ + جتا ٤٢٠ =

- $\cancel{\frac{١}{٢}}$ + ١ + (-٢) + $\cancel{\frac{١}{٢}}$ = ١ - ٢ = - ١

٢)

⊙ جتا ٢١٠ = جتا(١٨٠ + ٣٠) = - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⊙ جا٥١٠ = جا(٥١٠ - ٣٦٠) = جا ١٥٠ = جا(١٨٠ - ٣٠)

= جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

⊙ جا٣٣٠ = جا(٣٦٠ - ٣٠) = - جا ٣٠ = - $\frac{١}{٢}$

⊙ جتا(-٣٣٠) = جتا٣٣٠ = جتا(٣٦٠ - ٣٠) = جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا٢١٠ جا ٥١٠ - جا٣٣٠ جتا(-٣٣٠)

= - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + (- $\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = $\frac{-\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{٤}$

= - $\frac{٢\sqrt{٣}}{٤}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تدريب:

قاعدة مهمة :

(١) إذا كان أ ، ب زاويتين متتامتين فإن :

جا أ = جتا ب ، ظا أ = ظتا ب ، قتا أ = قا ب

(٢) إذا كان ⟸ جا أ = جتا ب فإن :

⟸ أ ± ب = ٩٠ + ٢ ن π ∀ ن ∈ ص

(٣) إذا كان ⟸ قتا أ = قا ب فإن :

⟸ أ ± ب = ٩٠ + ٢ ن π ∀ ن ∈ ص

(٤) إذا كان ⟸ ظا أ = ظتا ب فإن :

⟸ أ ± ب = ٩٠ + ن π ∀ ن ∈ ص

∀ أ ≠ (ن + $\frac{١}{٢}$) π ، ب ≠ ن π

مثال ٥ : أوجد قيم س التى تحقق ما يأتى :

١) قتا(س+٢٥) = قا(٢س-١٠) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

٢) ظا(٩٠+س) = ظتا(س-٣٠) ∀ ٠ < س ≤ ١٨٠

٣) جا($\frac{س - ٢٠}{٢}$) = جتا ($\frac{س + ٢٠}{٢}$) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

الحل

١) إذا كان قتا أ = قا ب فإن ⟸ أ ± ب = ٩٠ + ٢ ن π

⟸ قتا(س+٢٥) = قا(٢س-١٠)

∴ (س + ٢٥) ± (٢س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

عند حاصل الجمع:

(س + ٢٥) + (٢س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

٣س + ١٥ = ٩٠ + ٢ ن π

⊙ عندما ن = ٠ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ ⟸ ٣س = ٩٠ - ١٥

٣ س = ٧٥ ∴ س = ٢٥ ——— (١)

⊙ عندما ن = ١ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠

٣س = ٢٧٠ - ١٥ = ٢٥٥

٣ س = ٢٥٥ ∴ س = ٨٥ ——— (٢)

⊙ عندما ن = ٢ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ٣٦٠ = ٤٥٠

٣س = ٤٥٠ - ١٥ = ٤٣٥

٣س = ٤٣٥ ∴ س = $\frac{٤٣٥}{٣}$ = ١٤٥ ولكنها مرفوضة

لأنها لا تحقق الشروط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

عند حاصل الطرح:

(س + ٢٥) - (٢س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

س + ٢٥ - ٢س + ١٠ = - س + ٣٥ = ٩٠ + ٢ ن π

⊙ عندما ن = ٠ ⟸ - س + ٣٥ = ٩٠

- س = ٩٠ - ٣٥ = ٥٥ ⟸ س = - ٥٥

مرفوضة لأنها لا تحقق الشرط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

∴ م ح = { ٢٥ ، ٨٥ }

٢) إذا كان ⟸ ظا ٩ = ظتا ب فإن :

⟸ ٩ ± ب = ٩٠ + ن π

ظا(٩٠+س) = ظتا(س-٣٠) ∀ ٠ < س ≥ ١٨٠

(٩٠+س) ±(س-٣٠) = ٩٠ + ن π

عند حاصل الجمع

(٩٠+س) + (س-٣٠) = ٩٠ + ن π

٢س + ٦٠ = ٩٠ + ن π

⊙ عندما ن = ٠ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠

٢س = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠

٢س = ٣٠ ∴ س = ١٥ ـــــ (١)

⊙ عندما ن = ١ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ١٨٠

٢س + ٦٠ = ٢٧٠ ⟸ ٢س = ٢٧٠ ـ ٦٠

٢س = ٢١٠ ∴ س = ١٠٥ ـــــ (٢)

⊙ عندما ن = ٢ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٣٦٠

٢س + ٦٠ = ٤٥٠ ⟸ ٢س = ٤٥٠ ـ ٦٠ = ٣١٠

∴ ٢س = ٣١٠ ∴ س = ١٥٥ ـــــ (٣)

⊙ عندما ن = ٣ ⟸ ٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٥٤٠

٢س + ٦٠ = ٦٣٠ ⟸ ٢س = ٦٣٠ - ٦٠ = ٥٧٠

٢س = ٥٧٠ ∴ س = ٢٨٥

ولكنها لا تحقق الشروط حيث ٠ < س ≥ ١٨٠

عند حاصل الطرح:

٩٠ + س ـ س + ٣٠ = ٩٠ + ن π

١٢٠ = ٩٠ + ن π وهذا غير صحيح رياضيا

∴ م ح = { ١٥ ، ١٠٥ ، ١٥٥ }

(٣)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حل المعادلات المثلثية

إذا كانت جا θ = $\frac{١}{٢}$ فإن يتطرق فى أذهاننا مباشرة أن θ = ٣٠

بالرغم من أن جا ١٥٠ = $\frac{١}{٢}$ أيضا ولكننا نحبذ التعامل دائما مع الزاوية الحادة

لذا فإنه عندما تكون جا θ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ θ = ٣٠ أ، ١٥٠

كيف جاءت الزاوية ١٥٠ :

جا دالة مثلثية موجبة فى الربع الاول والثانى والزوايا المحورية على المحور س هي ٠ ، ١٨٠

والزاوية الاساسية التى تجعل جا θ = $\frac{١}{٢}$ هى θ = ٣٠

فيكون الحل العام للمعادلة

θ = ٠ + ٣٠ = ٣٠ لأن جا موجبة فى الربع الاول

θ = ١٨٠ ـ ٣٠ = ١٥٠ لأن جا موجبة فى الربع الثانى

خطوات حل المعادلة المثلثية :

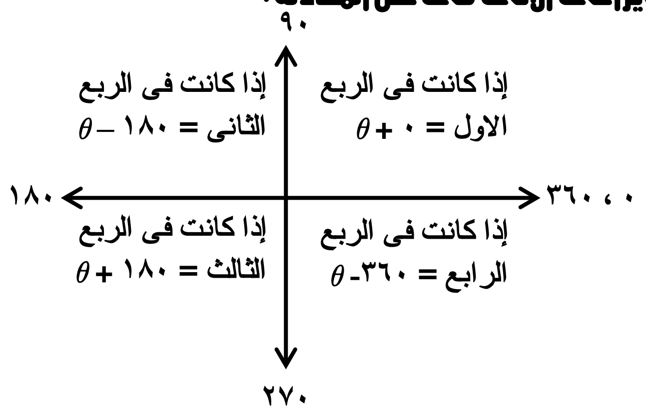
١) اولا يجب أن تكون الدالة فى الصورة جا θ =م أو جتا θ =م أو ظا θ =م وإذا لم تكون فى هذه الصورة فإنه يجب تحويلها لها

٢) تحديد الربعين اللذين تقع فيهما الدالة المثلثية عن طريق قاعدة الاشارات

٣)نوجد الزاوية الحادة التى تحقق النسبة المثلثية

٤) نستخدم الزوايا ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ ولا نستخدم الزوايا ٩٠ ، ٢٧٠ لأنها تغير الدوال المثلثية

ويراعى الآتى فى حل المعادلة:



مثال ٥: إذا كانت ظا θ = ١ أوجد قيم θ الممكنة حيث θ ∈]٠، ٢π [

الحل

ظا θ = ١ ظا موجبة فى الربع الاول والثالث

θ الحادة = ظا$^{-١}$ ١ = ٤٥

⊙ عندما تكون فى الربع الاول θ = ٠ + ٤٥ = ٤٥

⊙ عنما تكون فى الرع الثالث θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥

مثال ٦ : أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية الاتية

١) ٤ جتا^{٢}س – ٣ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢ π [

٢) ظا^{٣}س - $\frac{١}{ظتا س}$ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢ π [

٣) ٢جا^{٢}س – جاس – ١ = ٠ ∀ س ∈ [٠ ، ٢ π [

٤) ٢ جاس + $\sqrt{٣}$=٠ ، ٢ جتاس=١ ، س ∈ [٠ ، ٢ π [

٥) قاس + ٢ جتاس = ٣

الحل

١) ٤ جتا^{٢}س – ٣ = ٠ ⟸ ٤جتا^{٢}س = ٣

جتا^{٢}س= $\frac{٣}{٤}$ ⟸ جتا س = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

نفرض أن θ زاوية حادة وان جتا θ= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ= جتا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ =٦٠

ولكن :

جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ > ٠ موجبة
∴س فى الربع الاول والرابع
فى الربع الاول :
س= ٠ + ٦٠ = ٦٠
فى الربع الرابع:
س = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠

جتاس=- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ < ٠ سالبة
∴س فى الربع الثانى والثالث
فى الربع الثانى :
س = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠
فى الربع الثالث :
س = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

م ح = { ٦٠ ، ١٢٠ ، ٢٤٠ ، ٣٠٠ }

٢) ظا^{٣}س - $\frac{١}{ظتا س}$ = ٠ ⟸ ظا^{٣}س – ظا س = ٠

ظاس (ظا^{٢}س – ١)=٠

⟸ ظاس (ظا س +١) (ظا س – ١)=٠

ظاس =٠ ، ظاس =- ١ ، ظاس = ١

<u>أولا عندما ظاس = ٠</u>

∴س = ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ لأنها زوايا محورية

<u>ثانيا عندما ظاس =±١</u>

نفرض أن θ زاوية حادة وان ظا θ=١ ∴ θ= ظا$^{-١}$ ١ =٤٥

ولكن :

ظاس = ١ > ٠ موجبة
∴س فى الربع الاول والثالث
فى الربع الاول :
س = ٠ + ٤٥= ٤٥
فى الربع الثالث:
س =١٨٠ +٤٥ =٢٢٥

ظاس=- ١ < ٠ سالبة
∴س فى الربع الثانى والرابع
فى الربع الثانى :
س = ١٨٠ – ٤٥ =١٣٥
فى الربع الرابع :
س =٣٦٠ -٤٥ = ٣١٥

∴م ح ={ ٤٥ ، ١٣٥ ، ٢٢٥ ، ٣١٥ }

٣) ٢جا^{٢}س – جاس – ١ = ٠

(جا س – ١) (٢جاس + ١) = ٠

جاس = ١ جاس = - $\frac{١}{٢}$

<u>عندما جاس = ١ :</u>

∴س = ٩٠ لأنها زاوية محورية

عندما جاس = - $\frac{١}{٢}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = جا$^{-١}$ $\frac{١}{٢}$ = ٣٠

ولكن جاس = - $\frac{١}{٢}$ < ٠ (سالبة)

∴س تقع فى الربع الثالث والرابع

فى الربع الثالث : فى الربع الرابع

س = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠ س = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠

∴ م ح = { ٩٠ ، ٢١٠ ، ٣٣٠ }

٤) بنفسك

٥) قاس +٢ جتاس=٣ ⟸ $\frac{١}{جتا س}$+٢ جتاس =٣ ×جتاس

١ + ٢ جتا^{٢}س = ٣جتاس ⟸ ٢جتا^{٢}س – ٣ جتاس +١ = ٠

(جتاس-١) (٢جتاس – ١) = ٠

جتاس = ١ جتاس = $\frac{١}{٢}$

<u>عندما جتاس = ١ :</u>

∴س = ٠ ، ٣٦٠ لأنها زاوية محورية

عندما جتاس = $\frac{١}{٢}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ =جتا$^{-١}$ $\frac{١}{٢}$=٦٠

لكن جتا θ = $\frac{١}{٢}$ > ٠ موجبة

لذا فإن س تقع فى الربع الاول والرابع

فى الربع الاول : فى الربع الرابع :

س=θ=٦٠ س=٣٦٠ – θ=٣٦٠ – ٦٠= ٣٠٠

م ح = { ٠ ، ٣٦٠ ، ٦٠ ، ٣٠٠ }

التمثيل البياني للدوال المثلثية

١) اولا الدالة ى(س) = جا س

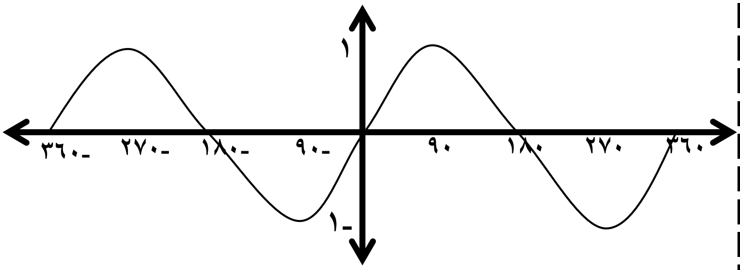
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
ى(س)=جاس	٠	١	٠	-١	٠	-١ < جاس < ١

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠	أى قيمة
ى(س)=جاس	٠	-١	٠	١	٠	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
٢)مجال الدالة هو ح
٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

@إذا كانت الدالة على الصورة ى (س) = م جا ب س

١) مدى الدالة هو [-م ، م]
٢) يكون المجال = ح
٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{\pi ٢}{ب}$

٢) ثانيا الدالة ى(س) =جتا س

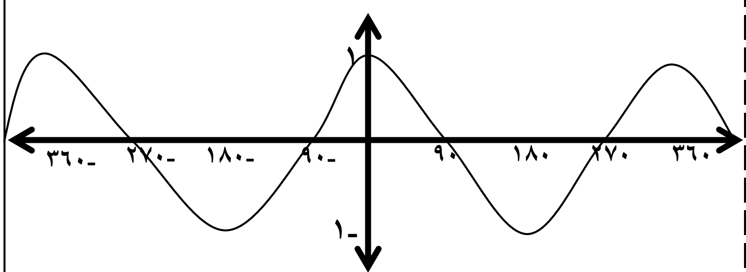
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
ى(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	١	-١ < جتاس < ١

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠	أى قيمة
ى(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	-١	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
٢)مجال الدالة هو ح
٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

@إذا كانت الدالة على الصورة ى (س) = م جتا ب س

١) مدى الدالة هو [-م ، م]
٢) يكون المجال = ح
٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{\pi ٢}{ب}$

٣) ثالثا الدالة ى(س) = ظا س

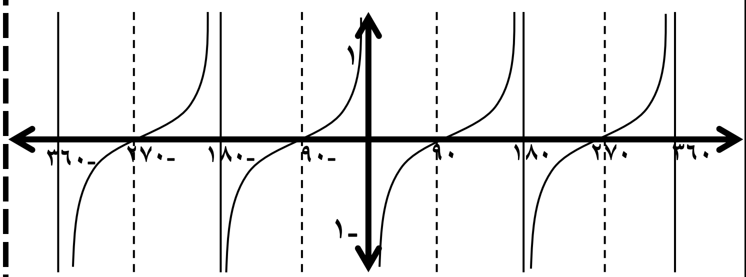
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
ى(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

وكذلك

س	٠	-٩٠	-١٨٠	-٢٧٠	-٣٦٠
ى(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة يتبين لنا
١)مدى الدالة = ح
٢)مجال الدالة = ح - { (ن + $\frac{١}{٢}$)π}
٣) الدالة دورية ودورتها π

@إذا كانت الدالة على الصورة ى (س) = م ظا ب س

١)مدى الدالة ح
٢) مجال الدالة = ح - { (ن + $\frac{١}{٢}$) $\frac{\pi}{ب}$ }
٣)الدالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{ب}$

مثال ١ :عين كلا من المجال والمدى والدورة لكلا من الدوال الاتية

١) د(س)=جاس   ٢) د(س)=جتاس

٣) د(س)=ظاس   ٤) د(س)=م جا ب س

٥) د(س)=٣جتا٤س   ٦) د(س)=٥ظا٢س

الحل

١) د(س)=جاس

المجال = ح   المدى = [-١ ، ١]   دورتها = ٢ π

٢) د(س)=جتاس

المجال = ح   المدى = [-١ ، ١]   دورتها = ٢ π

٣) د(س)=ظاس

المجال = ح − { (ن + $\frac{١}{٢}$) π }   المدى = ح

دورتها = π

٤) د(س)=م جا ب س

المجال = ح   المدى = [-١ ، ١]   دورتها = ٢π

٥) د(س)=٣جتا٤س

المجال = ح   المدى = [-٣ ، ٣]

دورتها = $\frac{٢\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$

٦) د(س)=٥ظا٢س

المجال = ح - { (ن + $\frac{١}{٢}$) $\frac{\pi}{٢}$ }

المدى = ح

دورتها = $\frac{\pi}{٢}$

مثال ٢ : مثل بيانيا كلا من الدوال الاتية

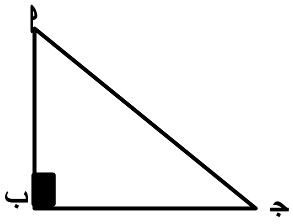
١) د(س) = جاس

٢) د(س) = جتاس

٣) د(س) = ظاس

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

إذا كان م ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن كلا من الزاويتين م ، ب حادتين



⊙ **الضلع ب جـ**

١) يكون مقابل للزاوية م

٢) يكون مجاور للزاوية جـ

⊙ **الضلع م ب**

١) يكون مقابل للزاوية جـ

٢) يكون مجاور للزاوية م

⊙ **الضلع م جـ**

يمثل وتر المثلث

الدوال المثلثية :

هى دوال تربط بين ضلعين وزاوية فى المثلث القائم وهى جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية وتسمى بالدوال الاساسية

وكذلك قاطع الزاوية وقاطع تمام الزاوية وظل تمام الزاوية وهى مقلوبات الدوال الاساسية

علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن م جـ وترا فى المثلث ، م ب ، ب جـ ضلعا القائمة ويكون

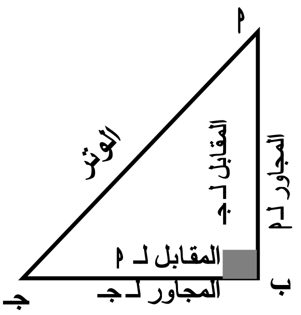
$$\text{جا م} = \frac{\text{المقابل لـ م}}{\text{وتر المثلث}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}}$$

$$\text{جتا م} = \frac{\text{المجاور لـ م}}{\text{وتر المثلث}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}}$$

$$\text{ظا م} = \frac{\text{المقابل ل م}}{\text{المجاور ل م}}$$

$$\text{قتا م} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{ب جـ}}$$

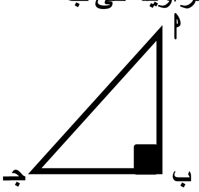
$$\text{قا م} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م ب}}$$



نظرية فيثاغورث إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

أى أن ق($\hat{ب}$) = ٩٠ فإن :

(م جـ)^{٢} = (م ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



ملاحظات مهمة

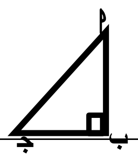
#إذا علم الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونطرحهما ونأتى بالجذر

#إذا غاب الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونجمعهما ونأتى بالجذر

مثال ١ : م ب جـ Δ فيه ق($\hat{ب}$) = ٩٠

وكان م ب = ١٢سم ، ب جـ = ٥ سم

أوجد : م جـ



الحل

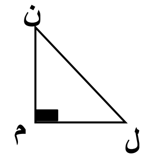
من فيثاغورث :

$(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2$

$أ ج = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

مثال ٢ : ل م ن Δ قائم الزاوية فى م وكان ل م = ٣ سم ، ل ن = ٥ سم اوجد مساحة المربع المنشأ على الضلع م ن

الحل



من فيثاغورث

$(ل ن)^2 = (ل م)^2 + (م ن)^2$

$م ن = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9}$

$= \sqrt{16} = 4$

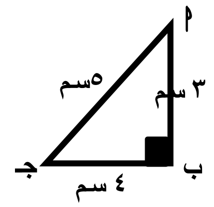
ملاحظات مهمة :

يجب رسم أى مثلث على المحور السينى
الوتر دائما موجب فى أى ربع
ضلعى القائمة إشارتهما هى إشارة المحور المرسوم عليه أو الموازى له

مثال ١ :

إذا كان أ ب ج Δ فيه ق(ب) = ٩٠ ، أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٤ سم أوجد جميع الدوال المثلثية للزوايا أ ، ب ، ج

الحل



من فيثاغورث :

$(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2$

$\therefore أ ج = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

أولا الزاوية ب القائمة :

جا ب = ١ جتا ب = ٠ ظا ب = غير معرف

المقلوبات بنفسك

ثانيا الزاوية أ

$جا ج = \frac{3}{5}$ $جتا ج = \frac{4}{5}$ $ظا ج = \frac{3}{4}$

المقلوبات بنفسك

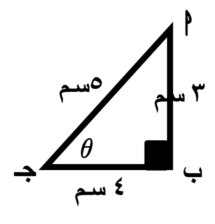
ثالثا الزاوية ج

$جا أ = \frac{4}{5}$ $جتا أ = \frac{3}{5}$ $ظا أ = \frac{4}{3}$

مثال ٢ : إذا كان $3 قتا \theta - 5 = 0$ حيث $0 < \theta < 90$

أوجد : $قا \theta - ظا \theta$

الحل



$3 قتا \theta - 5 = 0 \Leftarrow 3 قتا \theta = 5$

$\therefore قتا \theta = \frac{5}{3} \Leftarrow جا \theta = \frac{3}{5}$

من فيثاغورث :

$(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2$

$ب ج = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$\therefore قا \theta - ظا \theta = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

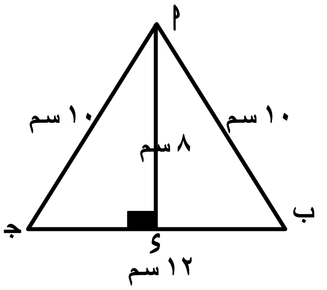
مثال ٣ : أ ب جـ Δ فيه : أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم رسم أ د ⊥ ب جـ يقطعها فى د : أوجد

١) جا ب + جتا جـ ٢) ظا(جـ أ د)

٣) بين أن جا جـ + جتا جـ > ١ ثم أوجد قيمة $جا^2 جـ + جتا^2 جـ$

٤) أوجد قيمة $ظا^2 ب + 1$ ، $قا^2 ب$ ماذا تلاحظ ؟

الحل



∵ أ د ⊥ ب جـ ، أ ب = أ جـ

∴ ب د = د جـ = ٦ سم

من فيثاغورث على الـ Δ أ د جـ

$(أ ج)^2 = (أ د)^2 + (د ج)^2$

$أ د = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ سم

١) $جا ب + جتا ج = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} = 0.8 + 0.6 = 1.2$

٢) $ظا(ج أ د) = \frac{6}{8} = 0.75$

٣) $جا ج + جتا ج = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} = 0.8 + 0.6 = 1.2 > 0$

قيمة : $جا^2 ج + جتا^2 ج = \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100}$

$= \frac{64 + 36}{100} = \frac{100}{100} = 1$

٤) $ظا^2 ب + 1 = \left(\frac{8}{6}\right)^2 + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{16}{9} + 1$

$= \frac{9 + 16}{9} = \frac{25}{9}$

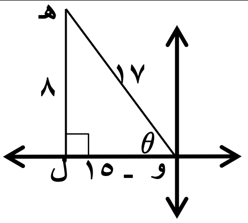
$\odot\ قا^2 ب = \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

نلاحظ أن $\Leftarrow ظا^2 ب + 1 = قا^2 ب$

مثال ٤ : إذا كان $جا \theta = \frac{8}{17}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

الحل



الزاوية تقع فى الربع الثانى لأنها تقع بين ٩٠ ، ١٨٠

ومن نظرية فيثاغورث

$و ل = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{928 - 64}$

$= \sqrt{225} = 15$ سم

وضعت و ل = -١٥ سم لأنها على الاتجاه السالب لمحور السينات

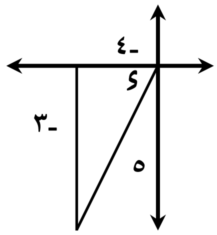
$\therefore جا \theta = \frac{8}{17}$ $جتا \theta = \frac{-15}{17}$ $ظا \theta = \frac{-8}{15}$

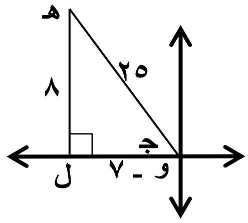
$قتا \theta =$ $قا \theta =$ $ظتا \theta =$

مثال ٥ : إذا كانت جتا ج = - $\frac{٧}{٢٥}$ حيث ج أصغر زاوية موجبة ، ظا ى = $\frac{٣}{٤}$ حيث ى أكبر زاوية موجبة حيث ٠ ≤ ى ≤ ٣٦٠ أوجد :
جتا(١٨٠+ى)جتا(٩٠-ج) + جتا(١٨٠-ج) جا(١٨٠-ى)

الحل

⊙ جتا ج سالبة لذا فإن ج تقع فى الربع الثانى او الثالث
ولكن ج اصغر زاوية موجبة لذا فإن ج تقع فى الربع الثانى
⊙ ظا ى موجبة لذا فإن ى تقع فى الربع الاول او الثالث
ولكن ى هى أكبر زاوية موجبة لذا فإنها تقع فى الربع الثالث



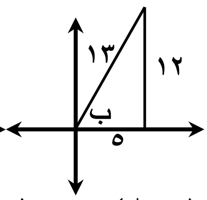


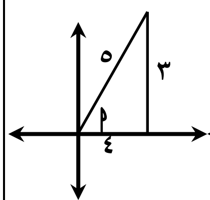
جتا(١٨٠+ى) جتا(٩٠-ج) + جتا(١٨٠-ج) جا(١٨٠-ى)
= -جتا ى × جا ج + -جتا ج × جا ى
= -جتا ى × جا ج - جتا ج × جا ى
$= -(-\frac{٤}{٥}) \times \frac{٨}{٢٥} - (-\frac{٧}{٢٥}) \times -\frac{٣}{٥}$
$= \frac{٣٢}{١٢٥} - \frac{٢١}{١٢٥} = \frac{١١}{١٢٥}$

مثال ٦: إذا كانت م ، ب زاويتين حادتين موجبتين وكان ٤قا م = ٥ ، ١٢ظتا ب = ٥ أوجد قيمة :
جا م جتا ب + جتا م جا ب

الحل

بإستخدام نظرية فيثاغورث نوجد الأضلاع الناقصة حيث
قا م = $\frac{٥}{٤}$ ⟸ جتا م = $\frac{٤}{٥}$ ظتا ب = $\frac{٥}{١٢}$ ⟸ ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$





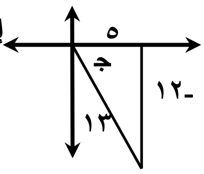
∴ قيمة المقدار
جا م جتا ب + جتا م جا ب =
$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{١٥}{٦٥} + \frac{٤٨}{٦٥} = \frac{١٥+٤٨}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٥}$

مثال ٧: إذا كانت :
٢٥ جا ب + ٢٤ = ٠ حيث ب أصغر زاوية موجبة
٥ ظا ج + ١٢ = ٠ حيث ج أكبر زاوية موجبة
∀ ب ،ج ∈]٠ ، ٣٦٠ [
أوجد قيمة :
(١) قتا(١٨٠+ب) ظتا(٩٠-ج) - قا(٣٦٠+ب) ظا(٣٦٠-ج)
(٢) قتا(٩٠+ب) ظتا(٢٧٠ +ج) ظا(٢٧٠ –ب) قتا(٢٧٠ + ج)

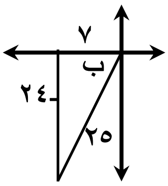
الحل

٢٥ جا ب + ٢٤ = ٠ ⟸ جا ب = - $\frac{٢٤}{٢٥}$ ∴ ب فى الربعين الثالث والرابع ولكن ب أصغر زاوية موجبة ∴ ب فى الربع الثالث

٥ ظا ج + ١٢ = ٠ ⟸ ظا ج = - $\frac{١٢}{٥}$ ∴ ج فى الربعين الثانى والرابع
ولكن ب أكبر زاوية موجبة ∴ ج فى الربع الرابع



إستخدم نظرية فيثاغورث



(١) قتا(١٨٠+ب) ظتا(٩٠-ج) - قا(٣٦٠+ب) ظا(٣٦٠-ج)
= -قتاب ظاج – قاب (-ظاج) =
$= - \frac{-٢٥}{٢٤} \times \frac{-١٢}{٥} - \frac{-٢٥}{٧} \times (- \frac{-١٢}{٥}) =$
$-\frac{٥}{٢٤} \times ١٢ + \frac{٥}{٧} \times ١٢ = -\frac{٥}{٢} + \frac{٥}{٧} \times ١٢ = -\frac{٥}{٢} + \frac{٦٠}{٧}$
$= \frac{-٣٥ + ١٢٠}{١٤} = \frac{٨٥}{١٤}$

(٢) قتا(٩٠+ب) ظتا(٢٧٠ +ج) ظا(٢٧٠ –ب) قتا(٢٧٠ + ج)
= قا ب × -ظاج × ظتا ب × -قا ج
$= \frac{٢٥}{٧} \times - \frac{-١٢}{٥} \times \frac{٧}{-٢٤} \times - \frac{١٣}{٥} = \frac{١٣}{٢}$

تدريب :

☹ إذا كانت ٤ظا م – ٣ =٠ حيث م أكبر زاوية موجبة ،
٥ قا ب = ١٣ حيث ب أكبر زاوية موجبة وكانت :
جا ج = $\frac{١٠ جا(١٨٠ - م) ظا(٩٠ - ب)}{١٣ جتا(١٨٠ - ب) + قا(-م)}$ أوجد قيمة ج
حيث ج ∈]٠ ، ٣٦٠ [