الإمتياز

فى

الهندسه

[الصف الأول الثانوى]

(٢٠١٦ - ٢٠١٧)

المنهج كامل

0100/2097866

شرح + أمثله محلولة
+ واجب على كل درس +
إختبارات على
أجزاء المنهج

إعداد

أ/ وليد محمد عكاشه

أ/ وليد محمد عكاشة

٠١٠٠/٢٠٩٧٨٦٦

هندســـة

الوحدة الثالثة

[التشابه]

(تشابه مضلعين)

الدرس الأول

← يقال لمضلعين لهما نفس عدد الأضلاع إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

1 تساوت قياسات الزوايا المتناظرة

2 تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

فمثلاً إذا كان أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

$$\therefore \frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ د}{ع ل} = \frac{أ د}{س ل} = ك$$

حيث ك هي معامل التشابه

لاحظ: إذا كان

* ك > ١ تسمى ك نسبة التكبير
* ٠ < ك < ١ تسمى ك نسبة التصغير
* ك = ١ يكون المضلعين متطابقين

ملاحظات هامة

1 المضلعات المتطابقة متشابهة ولكن ليس من الضروري أن يكون المضلعات المتشابهة متطابقة.

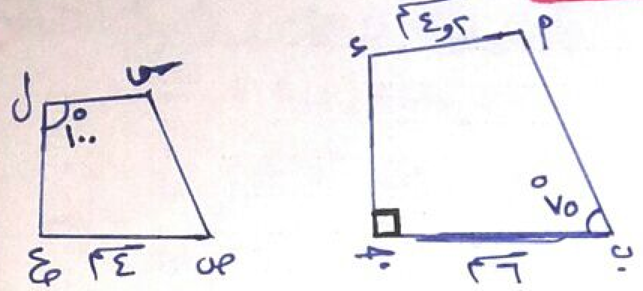
2 المضلعات المشابهة لثالث متشابهة

3 كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة

4 النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما.

أولى ثانوي.

مثال (1)



المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

1 احسب ق(∠س) ، طول س ل

2 إذا كان محيط المضلع أ ب جـ د يساوي ٨و٢٥ سم احسب محيط المضلع س ص ع ل

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠ع) = ق(∠جـ) = ٩٠° ،

∴ ق(∠ص) = ق(∠ب) = ٧٥° ،

∴ ق(∠د) = ق(∠ل) = ١٠٠° ،

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠س) = ٣٦٠° − (١٠٠° + ٩٠° + ٧٥°)

∴ ق(∠س) = ٩٥°

من التشابه ينتج أن [redacted]

$$\frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{أ د}{س ل} \Leftarrow \frac{٦}{٤} = \frac{٢و٤}{س ل}$$

$$\therefore س ل = \frac{٤ \times ٢و٤}{٦} = ٨و٢ \text{ سم} \quad \#①$$

$$\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{ب جـ}{ص ع}$$

$$\frac{٨و٢٥}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{٦}{٤}$$

$$\therefore \text{محيط المضلع س ص ع ل} = \frac{٨و٢٥ \times ٤}{٦}$$

∴ محيط المضلع س ص ع ل = ٢و١٧ سم #②

$$\text{نسبة التكبير} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{٦}{٤}$$

$$= \frac{٣}{٢} = ١و٥$$

المستطيل الذهبى

⇐ هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل مشابه للمستطيل الأصلى بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعف عرضه وتسمى النسبة بين طول المستطيل الذهبى إلى عرضه بالنسبة الذهبية

⇐ النسبة الذهبية = $\frac{\text{طول المستطيل الذهبى}}{\text{عرض المستطيل الذهبى}}$

≃ ١٫٦١٨ : ١

⇐ جميع المستطيلات الذهبية متشابهة

مثال مستطيل ذهبى عرضه ٥ سم أوجد طوله لأقرب سنتيمتر

الحل

$\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١٫٦١٨}{١}$

$\frac{\text{الطول}}{٥} = \frac{١٫٦١٨}{١}$

∴ الطول = $\frac{٥ \times ١٫٦١٨}{١}$ ≃ ٨ سم

مثال مستطيل ذهبى طوله ١٠ سم أوجد عرضه لأقرب جزء من عشرة

الحل

$\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١٫٦١٨}{١}$

$\frac{١٠}{\text{العرض}} = \frac{١٫٦١٨}{١}$

∴ العرض = $\frac{١٠ \times ١}{١٫٦١٨}$ ≃ ٦٫٢ سم

واجب (١) تشابه مضلعين

١ أكمل ما يأتى :-

١ يتشابه مضلعان إذا كانت الأضلاع المتناظرة .... والزوايا المتناظرة ....

٢ المضلعان المشابهان لثالث ....

٣ طول المستطيل الذهبى الذى عرضه ٣٤ يساوى ....

٤ النسبة الذهبية للمستطيل = ... : ....

٥ إذا كان معامل التشابه لمضلعين ك وكان

ك > ١ فإنهما يكون ....

ك < ١ تكون ....

ك = ١ يكونا ....

٦ مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين متشابهين فيهما ٥ : ٣ فإن النسبة بين محيطيهما ....

٧ مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين متشابهين فيهما ٤ : ٧ وكان محيط الأكبر ٥٠ سم فإن محيط الأصغر = ... لأقرب سنتيمتر

٨ مستطيلان متشابهان الأول بعداه ٣ ، ٣٤ والثانى محيطه ٣٠ سم فإن بعدى المستطيل الثانى .... سم ، .... سم

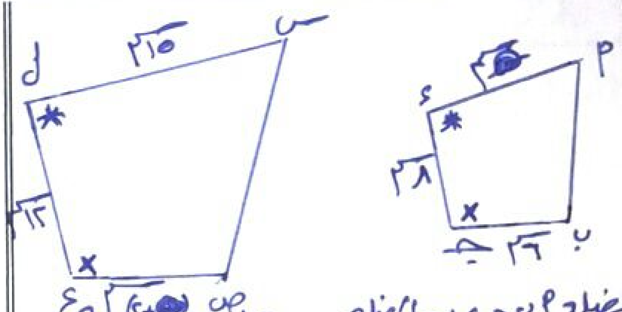
٩ جميع المستطيلات الذهبية تكون ....

١٠ المضلعان المتطابقان تكون النسبة بين محيطيهما تساوى .... : ....

٢ علية على شكل مستطيل أبعادها ٣٤ ، ٢١ سم هل هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبى؟ ولماذا؟

٣ مستطيل ذهبى طوله ١٢ سم احسب عرضه لأقرب سنتيمتر

[٤]



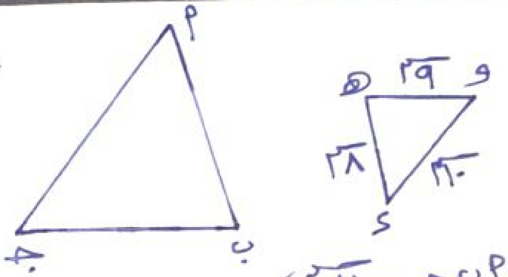
← المضلع ا ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

① معامل تشابه المضلع ا ب ج د للمضلع س ص ع ل.

② قيمة كلاً من ه ، و

③ إذا كان محيط المضلع ا ب ج د = ٤٠سم ! احسب محيط المضلع الآخر س ص ع ل

[٥]



محيط △ ا ب ج = ٨١سم ،
△ ا ب ج ~ △ د ه و ، د ه = ٨سم ،
ه و = ٩سم ، و د = ١٠سم أوجد أطوال أضلاع △ ا ب ج

[٦] مثلث ا ب ج فيه ا ب = ٥سم ، ب ج = ٦سم ، ا ج = ٩سم أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان

① معامل التشابه = ٠٫٥

② معامل التشابه = ٠٫٦

[٧] مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٨سم ، ١٢سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠سم أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته ومحيطه

"مع أطيب التمنيات بالتميز والتفوق"

[٢] الدرس الثاني

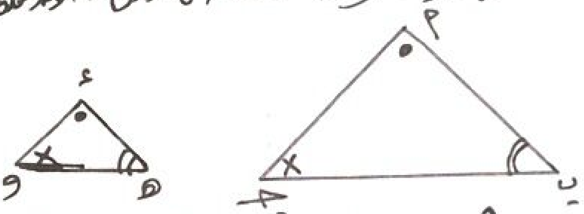
تشابه المثلثات

الحالة الأولى

← يتشابه المثلثين إذا تساوت الزوايا المتناظرة في كل من المثلثين

← في المثلث يكفي تساوي زاويتين مع نظائرها في المثلث الآخر ليحدث تشابه

← إذا طابقت زاويتين في مثلث زاويتين في مثلث آخر كان المثلثان متشابهان
(تكون الزاوية الثالثة في الأول = الثالثة في الآخر)



ق(∠ا) = ق(∠د) ، ق(∠ب) = ق(∠ه) ،
ق(∠ج) = ق(∠و)

∴ △ ا ب ج ~ △ د ه و

يتشابه المثلثان إذا كانت قياسات الزوايا المتناظرة متساوية في القياس

ملاحظات :

[١] يتشابه المثلثات القائمة الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة في أحدهما قياس زاوية حادة في المثلث الآخر.

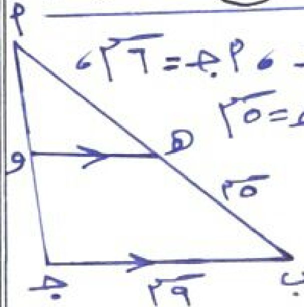
[٢] يتشابه المثلثات المتساويا الساقين :

• إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر.

• إذا ساوى قياس زاوية الرأس فى أحدهما قياس زاوية الرأس فى الآخر

(٣) المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان

مثال (١)



هـو // بجـ ، أجـ = ٣٦ ، بجـ = ٢٩ ، بهـ = ٣٥ ، أجـ = ١/٢ أب

① إثبت أن Δ أهـو ~ Δ أبجـ

② أوجد طول كل من: هـو ، جـو

الحل

∵ هـو // بجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) بالتناظر

∴ ق(∠جـ) = ق(∠و) بالتناظر

، ∠أ مشتركة

∴ الزوايا المتناظرة متساوية فى القياس

∴ Δ أهـو ~ Δ أبجـ

نطبق قاعدة تناسب الأضلاع

أهـ/أب = هـو/بجـ = أو/أجـ

٧/١٢ = هـو/٩ = أو/٦

∴ هـو = (٧ × ٩)/١٢ = ٥,٢٥ سم

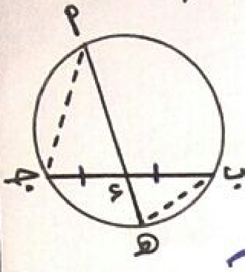
∴ أو = (٧ × ٦)/١٢ = ٣,٥ سم ∴ جـو = ٢,٥ سم

نتيجة ① إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى

"يا أرحم الراحمين إرحمنا"

مثال (٢)

أهـ ، بجـ وتران فى دائرة متقاطعان فى د حيث د منتصف بجـ إثبت أن (بد)² = أد × دهـ



الحل نرسم أجـ ، بهـ

∵ ق(∠ب) = ق(∠أ)

محيطيتان مشتركتان فى هـجـ

∵ ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

محيطيتان مشتركتان فى أب

∵ ق(∠بدهـ) = ق(∠أدجـ) بالتقابل بالرأس

∴ Δ بدهـ ~ Δ أدجـ

وينتج من التشابه أن

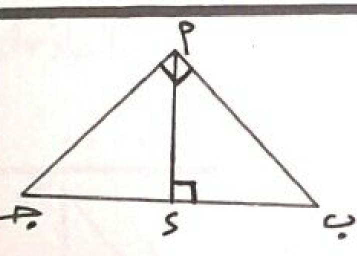
بد/أد = دهـ/دجـ = ~~بهـ/أجـ~~

∵ $\boxed{\text{بد = دجـ}}$ نستبدلها

بد/أد = دهـ/بد

∴ (بد)² = أد × دهـ #

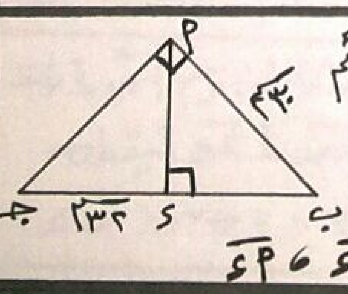
نتيجة (٢)



"إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلى"

Δ أبجـ ~ Δ دبأ ~ Δ دأجـ

مثال (٣)



أبجـ مثلث قائم فى أ ، أد ⊥ بجـ ، أب = ٢٤ سم ، دجـ = ٣٢ سم

إحسب طول كلاً من: بد ، أد

الحل ∵ Δ ب أ جـ قائمة ، أد ⊥ ب جـ

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

$\frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دأ}}$

$\frac{٣٠}{\text{دب}} = \frac{\text{دب} + ٣٢}{٣٠}$

$(\text{دب})^2 + ٣٢\ \text{دب} = ٩٠٠$

$(\text{دب})^2 + ٣٢\ \text{دب} - ٩٠٠ = ٠$

$(\text{دب} - ١٨)(\text{دب} + ٥٠) = ٠$

∴ $\boxed{\text{دب} = ١٨}$ سم ، دب = -٥٠ مرفوض

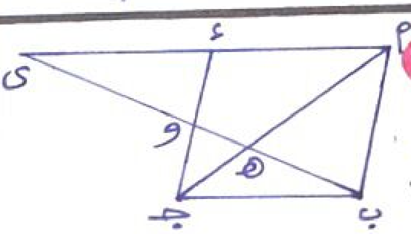
من نظرية إقليدس

$(\text{أد})^2 = \text{دب} \times \text{دجـ}$

$(\text{أد})^2 = ١٨ \times ٣٢ = ٥٧٦$

∴ أد = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم #

مثال (٤)



أ ب جـ د متوازي أضلاع ،

إثبت أن: ① Δ أ هـ ى ~ Δ جـ هـ ب

② $(\text{هـب})^2 = \text{هـى} \times \text{هـو}$

الحل ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(ى أ̂ جـ) = ق(هـ جـ̂ ب) بالتبادل

∵ ق(ى̂) = ق(هـ ب̂ جـ) بالتبادل

∴ ق(أ هـ̂ ى) = ق(ب هـ̂ جـ) بالتقابل بالرأس

∴ Δ أ هـ ى ~ Δ جـ هـ ب # ①

← $\frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{هـى}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أى}}{\text{جـب}}$ ← ①

Δ Δ أ هـ ب ، جـ هـ و فيهما

∵ ق(ب أ̂ هـ) = ق(هـ جـ̂ و) بالتبادل

∵ ق(أ ب̂ هـ) = ق(هـ و̂ جـ) بالتبادل.

، ق(أ هـ̂ ب) = ق(و هـ̂ جـ) بالتقابل بالرأس

∴ Δ أ هـ ب ~ Δ جـ هـ و

$\frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{هـب}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أب}}{\text{جـو}}$ ← ②

من ①، ② ينتج أن

$\frac{\text{هـب}}{\text{هـو}} = \frac{\text{هـى}}{\text{هـب}}$ (نضرب مقص)

$(\text{هـب})^2 = \text{هـى} \times \text{هـو}$ # ②

واجب (٢)

التشابه: (الحالة الأولى)

① أكمل ما يأتي:

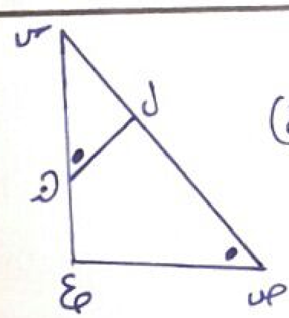
1 إذا رسم مستقيم يوازي قاعدة المثلث ويقسم الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج ...... المثلث الأصلي

2 يتشابه المثلثان إذا كانت الزوايا المتناظرة ....

3 إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين ...... وكلاهما ...... المثلث الأصلي

4 المثلثان المشابهان لثالث ....

② في الشكل المقابل



ق(س هـ̂ ل) = ق(س ص̂ ع)

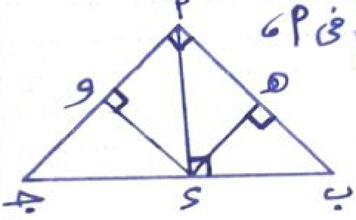
1 إثبت أن

Δ س ل هـ ~ Δ س ع ص

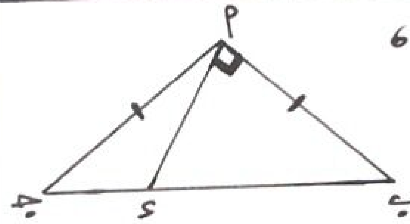
2 إذا كان طول س ل = ٣ سم ، ل هـ = ٥ سم ، ص ع = ٧ سم أوجد طول س ع

③ Δ Δ أ ب جـ ، د هـ و متشابهان رسم $\overleftarrow{\text{أس}}$ ⊥ ب جـ ليقطعه في س ، ورسم $\overleftarrow{\text{دص}}$ ⊥ هـ و ليقطعه في ص إثبت أن: ب س × ص و = جـ س × ص هـ

④ أب قطر في دائرة م، جـ نقطة تنتمي للدائرة، رسم $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ فقطع المماس للدائرة عند ب في نقطة ء، إثبت أن
$(\text{ب جـ})^2 = \text{جـ أ} \times \text{جـ ء}$



⑤ أ ب جـ مثلث قائم في أ،
$\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$،
$\overline{\text{ءهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$،
$\overline{\text{ءو}} \perp \overline{\text{أجـ}}$،
إثبت أن ① Δ أ ء هـ ~ Δ جـ ء و
② مساحة المستطيل أ هـ ء و $= \sqrt{\text{أهـ} \times \text{هـ ب} \times \text{أو} \times \text{و جـ}}$

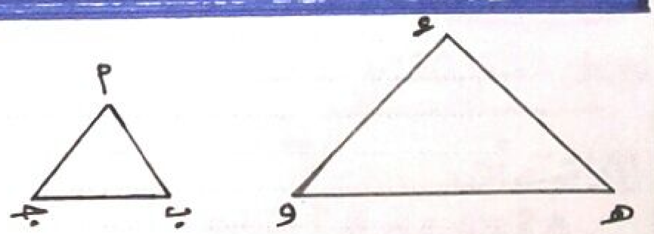


⑥ أ ب = أ جـ،
$\overrightarrow{\text{أء}} \perp \overline{\text{أب}}$،
إثبت أن
$2(\text{أ ب})^2 = \text{ب ء} \times \text{ب جـ}$

٣ الدرس الثالث

الحالة الثانية للتشابه

يتشابه المثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

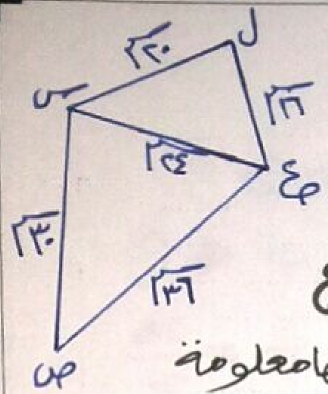


← إذا كان $\frac{\text{ءهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءو}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـو}}{\text{ب جـ}}$

- فتكون الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ ء هـ و ~ Δ أ ب جـ

مثال (١)



في الشكل المقابل:
إثبت أن
Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

الحل

∵ الأضلاع كلها معلومة
∴ نستخدم الحالة الثانية
(تناسب الأضلاع)

$\frac{\text{س ص}}{\text{ل س}} = \frac{30}{20} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$\frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}} = \frac{36}{24} = \boxed{\frac{3}{2}}$

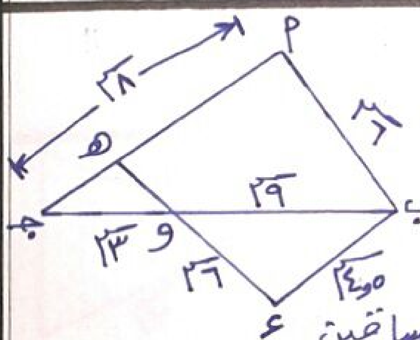
$\frac{\text{س ع}}{\text{ل ع}} = \frac{24}{16} = \boxed{\frac{3}{2}}$

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ل س}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ل ع}}$

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

مثال (٢)



← في الشكل المقابل
إثبت أن
① Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب و
② Δ هـ و جـ متساوي الساقين

الحل

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{6}{4.5} = \frac{4}{3}$

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب و}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}}$ (الأضلاع متناسبة)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب و

من التشابه ينتج أن ق($\angle$ ب و ء) = ق($\angle$ جـ) ①

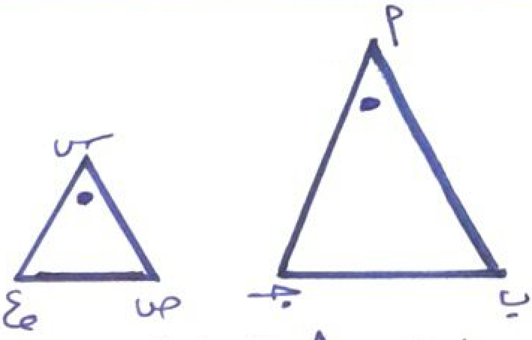
∵ ق(ب̂وى) = ق(هـ̂وج) ← (٢) بالتقابل بالرأس

من (١)، (٢) ينتج أن
ق(هـ̂وج) = ق(ج̂)

∴ △ هـوج متساوي الساقين # (٣)

الحالة الثالثه للتشابة

«إذا ساوت زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويهما هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهان»

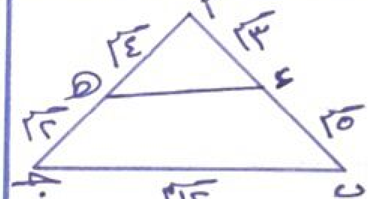


إذا كانت ق(أ̂) = ق(س̂)
وكان $\frac{أب}{س ص} = \frac{أج}{س ع}$

نستنتج أن △ أ ب ج ~ △ س ص ع

مثال (١)

* في الشكل المقابل



(١) أثبت أن
△ أ د هـ ~ △ أ ج ب
(٢) أوجد طول : د هـ

الحل

∵ د أ مشتركة ← (١)

∵ $\frac{أد}{أج} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∵ $\frac{أهـ}{أب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أد}{أج} = \frac{أهـ}{أب}$ ← (٢)

∴ △ أ د هـ ~ △ أ ج ب # (١)

∴ $\frac{أد}{أج} = \frac{د هـ}{ب ج}$ $\quad \frac{١}{٢} = \frac{د هـ}{١٢}$

∴ د هـ = $\frac{١٢ \times ١}{٢}$ = ٦ سم # (٢)

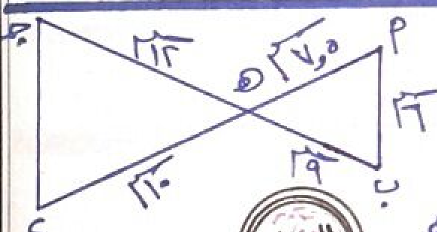
ملحوظة هامة جداً

(١) إذا كانت الأضلاع كلها معلومة نستخدم الحالة الثانية (التناسب)

(٢) إذا كنا نستطيع إثبات جميع الزوايا المتناظرة متساوية نستخدم الحالة الأولى (تساوي الزوايا)

(٣) إذا علم تساوي ضلعين متناظرين فقط وزاوية نستخدم الحالة الثالثة (ضلعين وزاوية)

مثال (٢)



إثبت أن
△ أ ب هـ ~ △ د ج هـ
ثم إحسب طول جد

الحل

∵ ق(أ̂هـب) = ق(ج̂هـد) ← (١)
بالتقابل بالرأس

∵ $\frac{أهـ}{د هـ} = \frac{٧,٥}{١٠} = \frac{٣}{٤}$

∵ $\frac{ب هـ}{ج هـ} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{أهـ}{د هـ} = \frac{ب هـ}{ج هـ}$ ← (٢)

من ①، ② ينتج أن

Δ أ ب هـ ~ Δ د جـ هـ

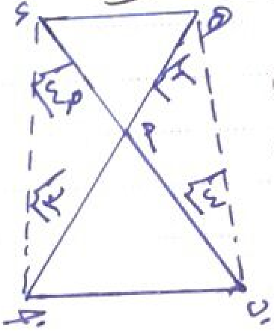
$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{دجـ}}$

$\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{\text{جـد}} \Leftarrow \text{جـد} = \frac{٦ \times ٤}{٣}$

∴ جـد = ٨ سم #

مثال (٣)

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤ سم، أ جـ = ٣ سم، د ∈ $\overrightarrow{\text{بأ}}$ بحيث أ د = ٤,٥ سم، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ بحيث أ هـ = ٦ سم. إثبت أن الشكل ب جـ د هـ رباعي دائري.



الحل نرسم الشكل كما هو موضح

في ΔΔ أ هـ ب، أ د جـ

∵ ق($\hat{\text{هـ أ ب}}$) = ق($\hat{\text{د أ جـ}}$) بالتقابل بالرأس ①

$\because \frac{\text{أهـ}}{\text{أد}} = \frac{٦}{٤,٥} = \frac{٤}{٣}$

، $\because \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{أد}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ← ②

من ①، ② ينتج أن

Δ هـ أ ب ~ Δ د أ جـ

ومن التشابه ينتج أن

ق($\hat{\text{ب هـ جـ}}$) = ق($\hat{\text{ب د جـ}}$)

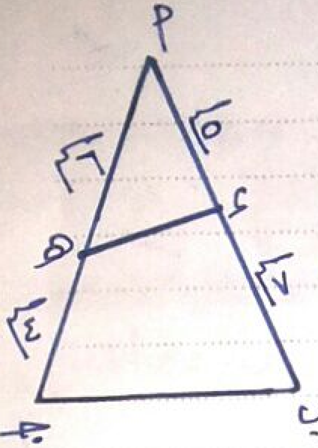
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ هـ ب جـ د رباعي دائري.

صلى على رسول الله (صلى الله عليه وسلم)

مثال (٤)

في الشكل المقابل



1 إثبت أن Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

2 إثبت أن الشكل د ب جـ هـ رباعي دائري

الحل

∵ ∠أ مشتركة ← ①

$\because \frac{\text{أد}}{\text{أجـ}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

$\because \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{\text{أد}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$ ← ②

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب # ①

من التشابه ينتج أن

ق($\hat{\text{أ د هـ}}$) = ق($\hat{\text{جـ}}$)

∵ ∠أ د هـ خارجة عن الشكل الرباعي د ب جـ هـ وتساوي المقابلة للمجاورة لها ∴ د ب جـ هـ رباعي دائري

واجب ٣

على الحالة الثانية والثالثة من التشابه

1 أكمل ما يأتي:

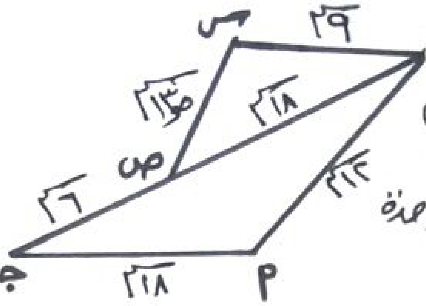
1 يتشابه المثلثان إذا كانت قياسات الزوايا المتناظرة ....

2 يتشابه المثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة ....

3 إذا ساوت زاوية قياس زاوية في مثلث آخر وتناسبت .... كان المثلثان متشابهان

4 Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع فإن جـ أ = ...

٢ في الشكل المقابل



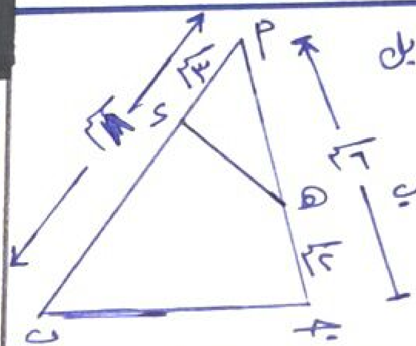
ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة

أثبت أن:

① Δ س ب ص ~ Δ أ ب جـ

② $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ أ ب س

٣ في الشكل المقابل



إثبت أن: Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

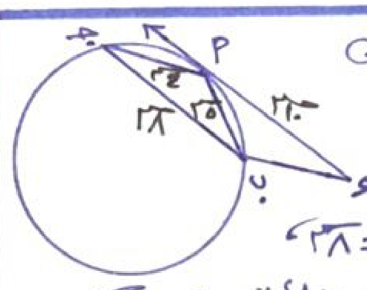
٤ Δ أ ب جـ فيه أ ب = ٨سم ، أ جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ هـ = ٢سم ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب د = ٤سم

إثبت أن:

① Δ ب د هـ ~ Δ ب أ جـ واستنتج طول د هـ

② الشكل أ جـ د هـ رباعي دائري

٥ في الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة حيث أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٨سم ، جـ أ = ٤سم ، $\overline{\text{أ د}}$ مماسه للدائرة ، أ د = ١٠سم

إثبت أن Δ د أ ب ~ Δ ب جـ أ ثم احسب طول: $\overline{\text{ب د}}$

٦ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ في هـ فإذا كان: $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{د جـ}}$ إثبت أن

① Δ أ ب هـ ~ Δ د ب جـ

② $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

٤ الدرس الرابع

العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

أي أنه إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

$$\therefore \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{م } \Delta \text{ س ص ع}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}\right)^2$$

تذكر أن: النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما.

مثال (١) مثلثان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين فيهما ٣ : ٥ وكانت مساحة أصغرهما ٣٠سم² أوجد مساحة أكبرهما والنسبة بين محيط كلاً منهم.

الحل

$$\frac{\text{مساحة الأصغر}}{\text{مساحة الأكبر}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^2$$

$$\frac{٣٠}{\text{مساحة الأكبر}} = \frac{٩}{٢٥} \quad \therefore \text{مساحة الأكبر} = \frac{٣٠ \times ٢٥}{٩}$$

$$\therefore \text{مساحة الأكبر} \simeq ٨٣٫٣ \text{ سم}^2$$

النسبة بين محيطيهما = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٥

ملاحظات هامة

1 النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي متوسطين متناظرين فيهما.

2 النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في قاعدة واحدة تساوي النسبة بين ارتفاعيهما

3 النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما.

← ملاحظة رقم ٢ ، ٣ ليس من الضروري تشابه المثلثين.

مثال ٢

مثلثان متشابهان النسبة بين ضلعين متناظرين فيهما ٤ : ٣ فإذا كان مجموع مساحتيهما ١٥٠ سم² فأوجد مساحة كلاً منهم

الحل

$$\frac{\text{مساحة الأكبر}}{\text{مساحة الأصغر}} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^2 = \frac{١٦}{٩}$$

نستخدم قاعدة التناسب $\frac{\text{مقدم + تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم + تالي}}{\text{تالي}}$

$$\frac{\text{مساحة الأكبر + مساحة الأصغر}}{\text{مساحة الأصغر}} = \frac{١٦ + ٩}{٩}$$

$$\frac{١٥٠}{\text{مساحة الأصغر}} = \frac{٢٥}{٩}$$

$\therefore$ مساحة الأصغر $= \frac{٩ \times ١٥٠}{٢٥} = ٥٤$ سم²

$\therefore$ مساحة الأكبر $= ١٥٠ - ٥٤ = ٩٦$ سم² #

مثال ٣

مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٤ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٥٢ سم² فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

$$\frac{\text{م الأصغر}}{\text{م الأكبر}} = \left(\frac{١}{٤}\right)^2 = \frac{١}{١٦}$$

$\therefore \frac{\text{م الأكبر}}{\text{م الأصغر}} = \frac{١٦}{١}$ ، $\frac{\text{مقدم - تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم - تالي}}{\text{تالي}}$

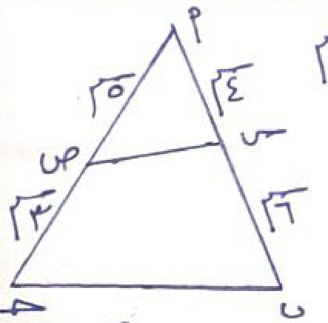
$$\frac{\text{م الأكبر - م الأصغر}}{\text{م الأصغر}} = \frac{١٦ - ١}{١}$$

$$\frac{٥٢}{\text{مساحة الأصغر}} = \frac{١٥}{١}$$

$\therefore$ مساحة الأصغر $= \frac{٥٢ \times ١}{١٥} = ٣,٤٧$ سم²

$\therefore$ مساحة الأكبر $= ٥٢ + ٣,٤٧ = ٥٥,٤٧$ سم²

مثال ٤



Δ أ ب جـ ، أ س = ٤ سم ، ب س = ٦ سم ، أ ص = ٥ سم ، ص جـ = ٣ سم أوجد

1 $\frac{\text{م } \Delta \text{ أ س ص}}{\text{م } \Delta \text{ أ جـ ب}}$

2 إذا كانت مساحة Δ أ س ص = ٢٠ سم² أوجد مساحة الشكل الرباعي س ب جـ ص

الحل

نثبت تشابه المثلثان أولاً

$\because$ ∠ أ مشتركة ← ①

$\because \frac{\text{أ س}}{\text{أ جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ ب}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{\text{أ س}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ ب}}$ ← ②

من ① ، ② ينتج أن

Δ أ س ص ~ Δ أ جـ ب

$\because \dfrac{\text{م}\,\Delta\,\text{أ س ص}}{\text{م}\,\Delta\,\text{أ ب جـ}} = \left(\dfrac{\text{أ س}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \left(\dfrac{٤}{٨}\right)^2$

$= \dfrac{١}{٤}$ # [1]

$\because \dfrac{\text{م}\,\Delta\,\text{أ س ص}}{\text{م}\,\Delta\,\text{أ ب جـ}} = \dfrac{١}{٤}$

$\therefore \dfrac{\text{م}\,\Delta\,\text{أ ب جـ}}{\text{م}\,\Delta\,\text{أ س ص}} = \dfrac{٤}{١}$

$\therefore \dfrac{\text{م}\,\Delta\,\text{أ ب جـ} - \text{م}\,\Delta\,\text{أ س ص}}{\text{م}\,\Delta\,\text{أ س ص}} = \dfrac{٤-١}{١}$

$\therefore \dfrac{\text{م الشكل س ب جـ ص}}{٢٠} = \dfrac{٣}{١}$

$\therefore \text{م الشكل س ب جـ ص} = \dfrac{٢٠ \times ٣}{١}$

$= ٦٠\ \text{سم}^2$ # (٢)

ملاحظات هامة :-

[1] المضلعات المتشابهات ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيرة

[2] عدد المثلثات التي ينقسم إليها المضلع برسم الأقطار المشتركة في أحد الرؤوس = (ن − ٢) مثلثاً حيث (ن) هو عدد أضلاع المضلع .

واجب [4]

العلاقة بين مساحتي مضلعين متشابهين

[1] أكمل ما يأتي :-

[1] إذا كان طولا ضلعين في مضلعين متناظرين هما ٣ سم ، ٤ سم فإن النسبة بين محيطيهما تساوي ...... والنسبة بين مساحتيهما تساوي ....

[2] مضلعان متشابهين النسبة بين مساحتيهما ١٦ : ٢٥ فإن النسبة بين محيطيهما ....

[3] Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، أ ب = ٣ س ص فإن $\dfrac{(\text{م}\,\Delta\,\text{س ص ع})}{(\text{م}\,\Delta\,\text{أ ب جـ})} = $ ....

[4] مربعان النسبة بين طولي قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم² فإن مساحة أكبرهما .... سم²

[5] النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٩ : ٢٥ وكان طول أحد أضلاع المضلع الأصغر ٣ سم فإن طول نظيره في المضلع الأكبر ...... سم

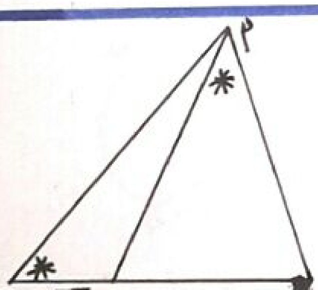
[2]

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع أَ بَ جَ دَ ، $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \dfrac{١}{٣}$ فأوجد كلاً من

$\dfrac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جَ دَ}}$ ، $\dfrac{\text{م المضلع أ ب جـ د}}{\text{م المضلع أَ بَ جَ دَ}}$

[3]

في الشكل المقابل اثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ ثم احسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، ثم أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين أ ب جـ ، د ب أ



[4]

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٧ وكان الفرق بين مساحتيهما ٢٠ سم² أوجد مساحة كلاً منهما

[5]

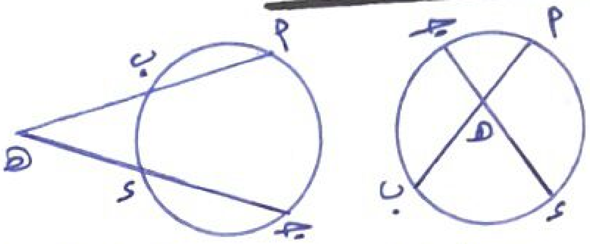
مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعيهما ١ : ٣ ومحيط الأكبر ١٢ سم أوجد محيط الأصغر والنسبة بين مساحتيهما.

٥ الدرس الخامس

تطبيقات التشابه في الدائرة

تمارين مشهورة وعكسها

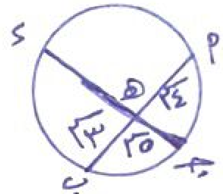
تمرين مشهور :-



← إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين
$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ للدائرة في هـ فإن

$\boxed{أهـ \times هـ ب = هـ جـ \times هـ د}$

مثال ١ في الشكل المقابل
أوجد طول $\overline{د هـ}$



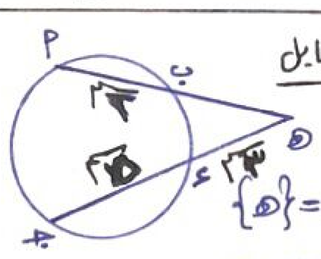
الحل ∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{د جـ} = \{هـ\}$

أهـ × هـ ب = د هـ × هـ جـ

٤ × ٣ = د هـ × ٥

١٢ = ٥ د هـ ⇐ د هـ = $\frac{١٢}{٥}$ = ٢٫٤ سم

مثال ٢ في الشكل المقابل
أوجد طول ب هـ



الحل ∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

∴ هـ ب × هـ أ = هـ د × هـ جـ

هـ ب × (هـ ب + ٢) = ٣ × ٨

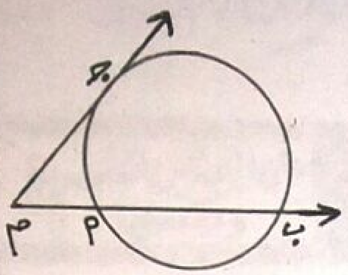
(هـ ب)^2 + ٢ هـ ب = ٢٤

(هـ ب)^2 + ٢ هـ ب − ٢٤ = ٠

(هـ ب − ٤)(هـ ب + ٦) = ٠

∴ $\boxed{هـ ب = ٤}$ سم ، هـ ب = −٦ × مرفوض

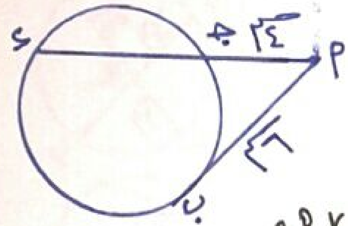
نتيجة هامة



← إذا كان أحد القاطعين
مماساً للدائرة

فإن (م جـ)^2 = م أ × م ب

مثال ٣



$\overleftrightarrow{أب}$ مماسة للدائرة عند ب
أوجد طول : $\overline{جـ د}$

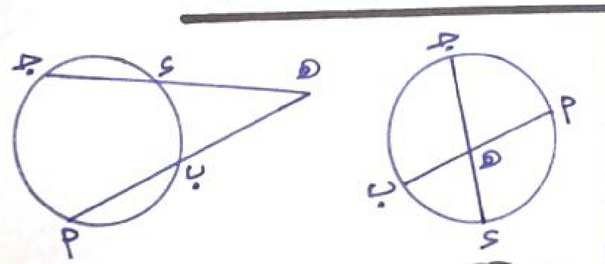
الحل (أب)^2 = أجـ × أد

(٦)^2 = ٤ × أد

∴ أد = $\frac{٣٦}{٤}$ = ٩ سم

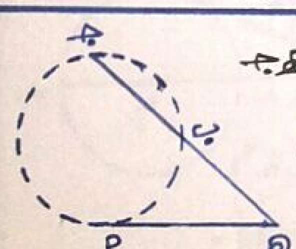
∴ جـ د = ٩ − ٤ = ٥ سم

عكس تمرين مشهور :-



إذا كان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د
فإن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة

← إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين
$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ في نقطة هـ وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د
فإن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة

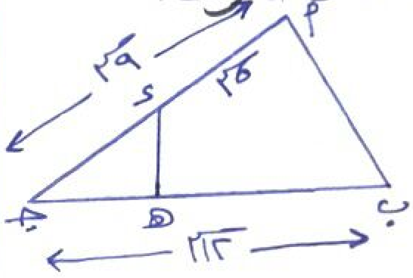


* إذا كان (هـ أ)^2 = هـ ب × هـ جـ
فإن : $\overline{هـ أ}$ تمس الدائرة
المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

مثال ٤

أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٩ سم، ب جـ = ١٢ سم، د ∈ أ جـ بحيث أ د = ٥ سم، هـ ∈ ب جـ بحيث $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ = ٣ اثبت أن: الشكل أ ب هـ د رباعي دائري.

الحل



جـ د × جـ أ = ٤ × ٩ = ٣٦ ← (١)

∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{٣}{١}$

∴ $\frac{\text{ب هـ + جـ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{٣+١}{١}$

∴ $\frac{١٢}{\text{جـ هـ}} = \frac{٤}{١}$ جـ هـ = $\frac{١٢ × ١}{٤}$

∴ جـ هـ = ٣ سم

∴ ب هـ = ١٢ − ٣ = ٩ سم

∴ جـ هـ × جـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦ ← (٢)

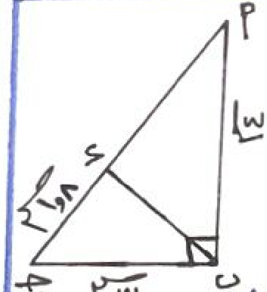
من (١)، (٢) ينتج أن

∵ جـ د × جـ أ = جـ هـ × جـ ب

∴ الشكل أ ب هـ د رباعي دائري.

مثال ٥

اثبت أن ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د



الحل

في Δ أ ب جـ القائم في ب

أ جـ = $\sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∴ أ د = ٥ − ١٫٨ = ٣٫٢ سم

∵ (جـ ب)² = (٣)² = ٩ سم²

∵ جـ د × جـ أ = ١٫٨ × ٥ = ٩ سم²

∴ (جـ ب)² = جـ د × جـ أ

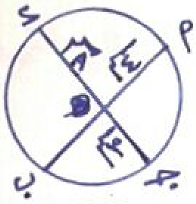
∴ ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د

واجب ٥

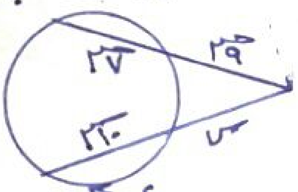
على التمارين المشهورة وعكسها.

١ أكمل ما يأتي :-

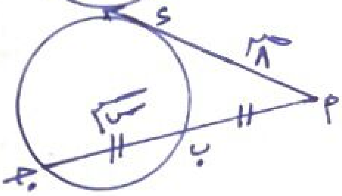
١ في الشكل المقابل أ هـ = ٤ سم، د هـ = ٨ سم، جـ هـ = ٣ سم فإن هـ ب = ...



٢ في الشكل المقابل س = ... سم



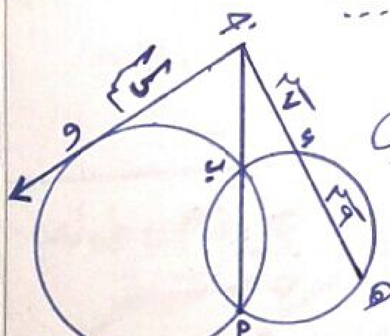
٣ في الشكل المقابل س = ... سم



٤ أ ب، جـ د وتران متقاطعان في الدائرة م في هـ فإن أ هـ × هـ ب = ...

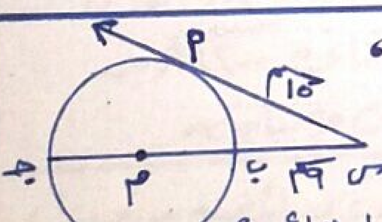
$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ = $\frac{......}{......}$

٥ في الشكل المقابل: جـ و مماس للدائرة الكبرى عند و فإن س = ... سم



٢

س أ مماسة عند أ، س أ = ١٥ سم، س ب = ٩ سم، احسب طول نصف قطر الدائرة م ثم احسب محيطها ومساحتها.



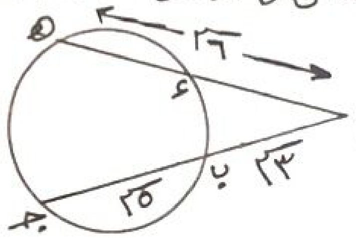
اختبارات عامة على التشابه وتطبيقاته (الوحدة الثالثة)

اختبار (1)

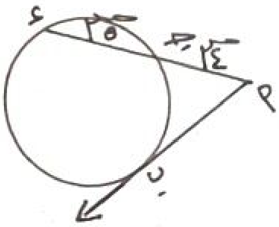
[1] أكمل ما يأتي :-

[1] يتشابه المثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة ....

[2] المثلثان المشابهان لثالث ....



[3] أهـ = ٦ سم ، أب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم
فإن أ ء = ... ، ء هـ = ...



[4] أب مماس للدائرة عند ب ، أجـ = ٤ سم ، جـ ء = ٥ سم فإن أب = ... سم

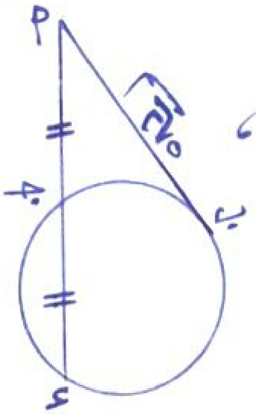
[5] مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٧ : ٥ ومساحة أكبرهما ١٥٠ سم² فإن مساحة أصغرهما ....

[2] (أ) علبة على شكل مستطيل ذهبي طوله ٦ سم ، احسب عرضها لأقرب سنتيمتر

(ب) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٨ سم ، ٢ سم ومحيط الثاني ٢٠ سم أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته

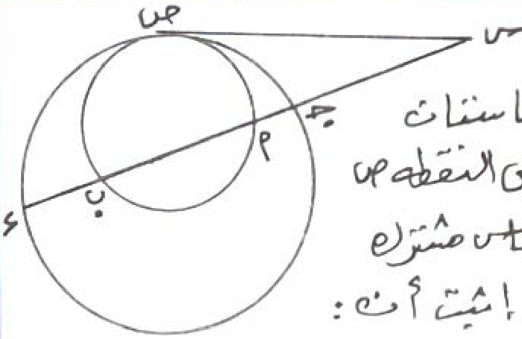
[3] (أ) المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل ، أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، س ص = ٣م − ١ ، ص ع = ٣م + ١ أوجد القيمة العددية لـ م .

[3] في الشكل المقابل



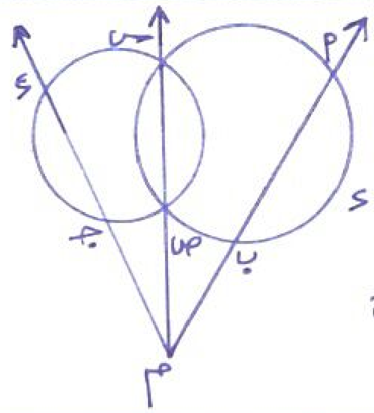
أب قطعة مماسة للدائرة ، جـ منتصف أء ،
طول أب = ٥√٢ سم
أوجد طول : أء

[4] دائرتان متماستان من الداخل في النقطة ص ، ص س مماس مشترك للدائرتين إثبت أن :



س أ / س ء = س جـ / س ب

[5] في الشكل المقابل



إثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تمر بها دائرة واحدة

[6] أ ب جـ مثلث حاد الزوايا ، أء ، ب هـ ارتفاعات فيه متقاطعان في و ، إثبت أن

(أهـ × أجـ) / (ب و × و هـ) = أء / و ء

[7] أ ب جـ ء مستطيل فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم رسم ب هـ ⊥ أجـ فقطع أجـ في هـ ، أء في و

(1) إثبت أن (أب)² = أو × أء

(2) أوجد طول أو

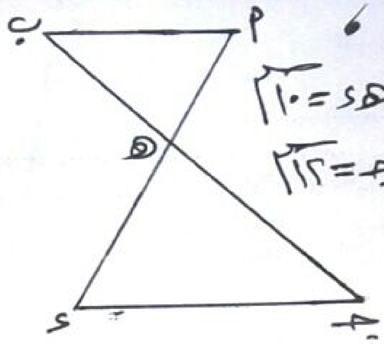
اللهم صلى وسلم وبارك على سيدنا محمد (ﷺ)

(ب) $\overline{أب} \parallel \overline{جد}$ ،

أهـ = ٥ سم ، هـ د = ١٠ سم

ب هـ = ٦ سم ، هـ جـ = ١٢ سم

، ب جـ = ١٦ سم



إثبت أن

[١] △ أ هـ ب ~ △ د هـ جـ

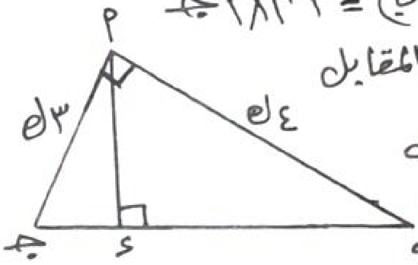
[٢] أوجد طول $\overline{أب}$

٤ (أ) في المثلث أ ب جـ ، أ جـ > أ ب ،

م ∈ $\overline{أجـ}$ ، ق(∠أ ب م) = ق(∠جـ)

إثبت أن (أب)^2 = أم × أجـ

(ب) في الشكل المقابل



٤ أجـ = ٣ أ ب

، ∠ب أ جـ قائمة

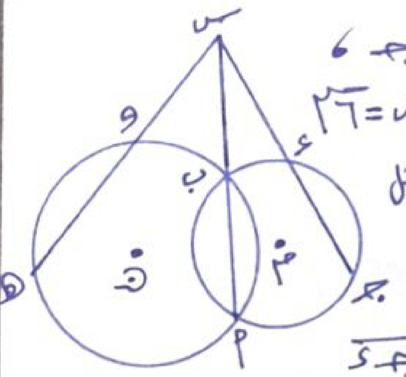
$\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

م △ أ د جـ = ١٨٠ سم^2 احسب مساحة

△ أ ب جـ

٥ س د = ٢ د جـ ،

هـ و = ٢٠ سم ، و س = ٦ سم



[١] إثبت أن الشكل هـ د و هـ رباعي دائري

[٢] أوجد طول $\overline{جد}$

إختبار ٢

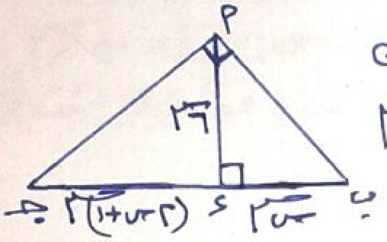
١ أكمل ما يأتي :-

[أ] إذا كان معامل التشابه لمضلعين = ١ فإن المضلعين يكونان ....

[٢] إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائرها في مثلث آخر كان المثلثان ....

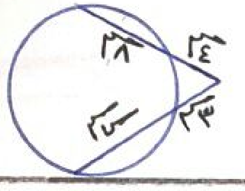
[٣] إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فإن النسبة بين محيطيهما ....

[٤] في الشكل المقابل



س = ... سم

[٥] في الشكل المقابل



س = ... سم

٢ (أ) أ ب جـ ، د هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{بجـ}$ ، ص منتصف $\overline{هـو}$

إثبت أن △ أ ب س ~ △ د هـ ص

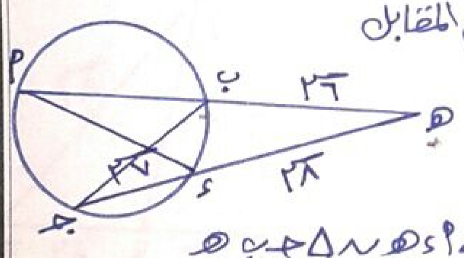
(ب) في الشكل المقابل

إثبت أن

[١] △ أ ب جـ ~ △ أ ص س

[٢] الشكل س ب جـ ص رباعي دائري .

٣ (أ) في الشكل المقابل



هـ ب = ٦ سم ،

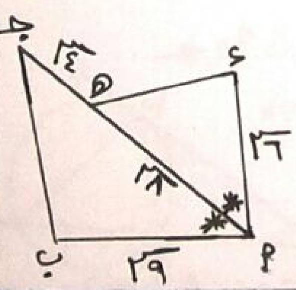
هـ د = ٨ سم ،

د جـ = ٧ سم

① إثبت أن △ أ د هـ ~ △ جـ ب هـ

② أوجد طول : $\overline{أهـ}$

(ب) في الشكل المقابل

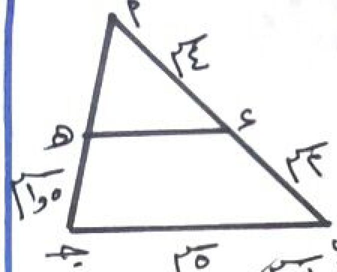


$\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ د أ ب ،

مساحة △ أ د هـ = ١٢ سم^2

أوجد مساحة △ أ ب جـ

٤ ⓐ في الشكل المقابل



Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

اثبت أن $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

وإذا كان أ د = ٤سم ،

د ب = ٢سم ، هـ جـ = ١,٥سم ،

ب جـ = ٥سم أوجد طول كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{د هـ}$

(ب) أ ب جـ د ~~مثلث~~ ، شكل رباعي فيه ب جـ = ٢٧سم

أ ب = ١٢سم ، أ د = ٨سم ، د جـ = ١٢سم ،

أ جـ = ١٨سم اثبت أن

Δ (ب أ جـ) ~ Δ (أ د جـ) وأوجد

النسبة بين مساحتي سطحيهما .

٥ أ ب جـ د شكل رباعي دائري فإذا كان

$\overleftrightarrow{ب أ}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ د}$ = {هـ} اثبت أن

(١) Δ هـ أ د ~ Δ هـ جـ ب

(٢) هـ أ × هـ ب = هـ د × هـ جـ

إختبار (٣)

(١) أكمل ما يأتي :-

(١) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتي سطحيهما ....

(٢) يتشابه المثلثات المتساويا الساقين إذا تساوى ....

(٣) إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج .... المثلث الأصلي

(٤) مستطيل ذهبي عرضه ١,٨سم فإن طوله ≃ .... لأقرب سنتيمتر

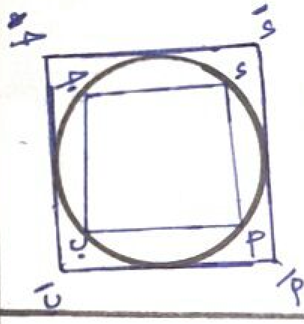
(٥) يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كان ....

٢ ⓐ $\overline{أ ب}$ وتر طوله ٨سم في دائرة م ، $\overleftrightarrow{م جـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ويقطعه في جـ ويقطع الدائرة في د فإذا كان جـ د = ٢سم فأحسب طول نصف قطر الدائرة

(ب) أ ب جـ مثلث فيه $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في هـ . اثبت أن

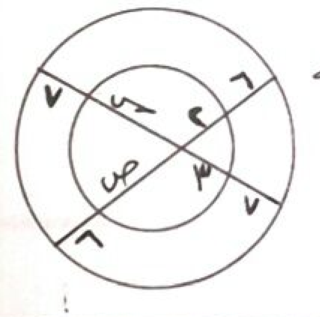
$$\frac{م(\Delta أ ب جـ)}{م(\Delta أ ب هـ)} = \frac{٧}{١٦}$$

٣ في الشكل المقابل



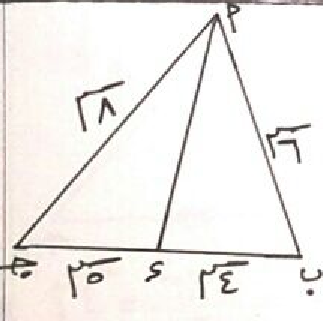
مربعان أحدهما مرسوم داخل الدائرة والآخر خارجها أوجد النسبة بين مساحتيهما .

٤ في الشكل المقابل



باستخدام الأطوال المبينة على الرسم والدائرتين المتحدتي المركز أوجد قيمة س ، ص العددية

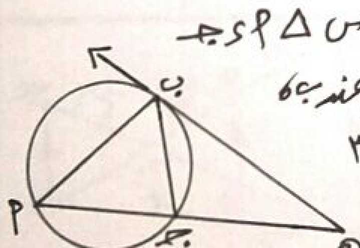
٥ ⓐ في الشكل المقابل



(١) اثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

(٢) أوجد طول $\overline{أ د}$

(٣) اثبت أن $\overline{أ ب}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ



(ب) $\overleftrightarrow{هـ ب}$ مماس للدائرة عند ب ، أ ب : ب جـ = ٤ : ٣

(١) اثبت أن Δ هـ ب جـ ~ Δ هـ أ ب

(٢) أوجد م(Δ أ ب جـ) : م(Δ أ ب هـ)

الوحدة الرابعة

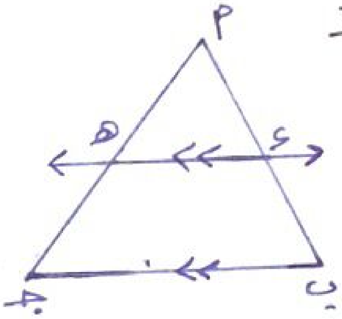
التناسب فى المثلث

الدرس الأول

نظرية (١)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة

* إذا كان $\overleftrightarrow{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$



نستنتج أن

$\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ (جزء / جزء)

$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ (جزء / كل)

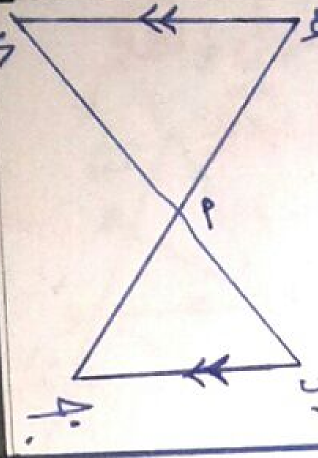
$\frac{أب}{دب} = \frac{أجـ}{هـجـ}$ (كل / جزء)

تذكر أن: من التشابه نستنتج أن

$$\boxed{\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{دهـ}{بجـ}}$$

لاحظ أن د ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$

* إذا كانت د ∈ $\overrightarrow{بأ}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{جـأ}$ فيكون تطبيق النظرية كالتالي



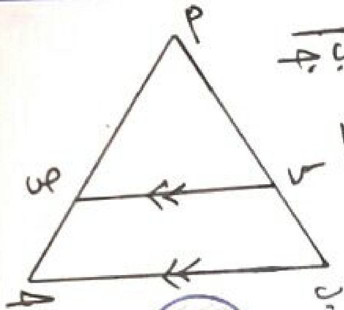
$\overline{هـد} \parallel \overline{بجـ}$

نستنتج أيضاً

$\frac{أهـ}{أجـ} = \frac{أد}{أب}$ ،

$\frac{هـأ}{هـجـ} = \frac{دأ}{دب}$

مثال (١)



$\overline{سص} \parallel \overline{بجـ}$ ، أس = ٣ سم ، أص = ٤ سم ، سب = $(\frac{1}{2} ك - 1)$ سم ، صجـ = ٢ سم احسب قيمة ك العددية.

الحل

∵ $\overline{سص} \parallel \overline{بجـ}$

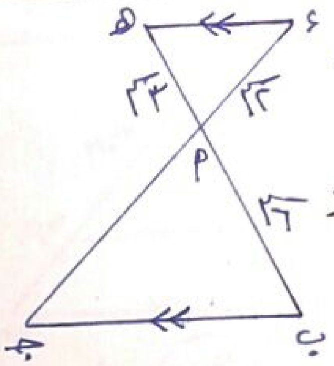
∴ $\frac{أس}{سب} = \frac{أص}{صجـ}$

∴ $\frac{3}{\frac{1}{2}ك - 1} = \frac{4}{2}$ (نضرب مقص)

$2ك - 4 = 6 \Leftarrow 2ك = 10$

∴ $ك = \frac{10}{2} = 5$ سم

مثال (٢)



$\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$

أوجد طول: $\overline{أجـ}$

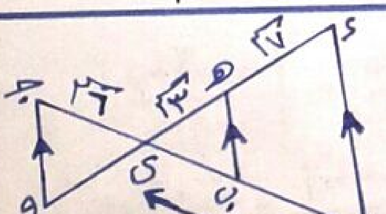
الحل

∵ $\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$

∴ $\frac{أد}{أجـ} = \frac{أهـ}{أب}$

$\frac{2}{أجـ} = \frac{3}{6} \Leftarrow أجـ = \frac{2 \times 6}{3} = 4$ سم

مثال (٣)



$\overline{دأ} \parallel \overline{هـب} \parallel \overline{جـو}$

أوجد طول كل من $\overline{ىو}$ ، $\overline{ىب}$

الحل

∵ $\overline{أد}$ // $\overline{هـ ب}$ // $\overline{حـ و}$

∴ في Δ أ ى د

∵ $\overline{هـ ب}$ // $\overline{أد}$

∴ $\frac{ى هـ}{ى د} = \frac{ى ب}{ى أ}$

∴ $\frac{٣}{١٠} = \frac{ى ب}{١٦} \Leftarrow$ ى ب $= \frac{٣ \times ١٦}{١٠}$

ى ب = ٤٫٨ سم

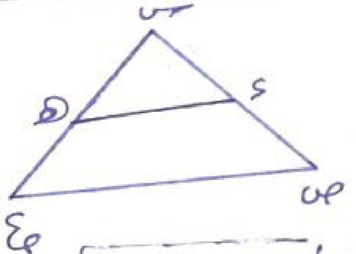
∵ $\overline{هـ ب}$ // $\overline{حـ و}$

∴ $\frac{ى هـ}{ى و} = \frac{ى ب}{ى حـ}$

∴ $\frac{٣}{ى و} = \frac{٤٫٨}{٦} \Leftarrow$ ى و $= \frac{٣ \times ٦}{٤٫٨}$

∴ ى و = ٣٫٧٥ سم #

عكس نظرية (١)



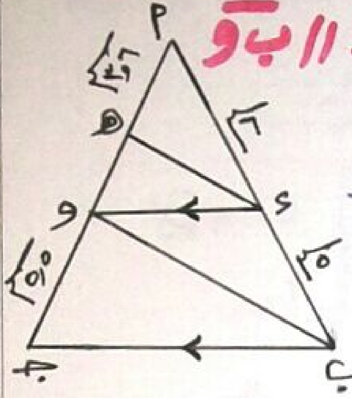
* في Δ س ص ع
إذا كان $\frac{س د}{د ص} = \frac{س هـ}{هـ ع}$
فإننا نستنتج أن $\boxed{\overline{د هـ} // \overline{ص ع}}$

* أي أنه إذا كانت القطع متناسبة نستنتج (توازي)

> إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث

مثال (٤) إذا كان $\overline{د و}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ د = ٦ سم ، ب د = ٥ سم ، أ هـ = ٣٫٦ سم ، و حـ = ٥٫٥ سم أوجد طول : $\overline{هـ و}$

ثم اثبت أن : $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب و}$



الحل

في Δ أ ب حـ

∵ $\overline{د و}$ // $\overline{ب حـ}$

∴ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ و}{و حـ}$

∴ $\frac{٦}{٥} = \frac{أ و}{٥٫٥}$

∴ أ و $= \frac{٦ \times ٥٫٥}{٥} = ٦٫٦$ سم

∴ هـ و = أ و − أ هـ = ٦٫٦ − ٣٫٦

∴ هـ و = ٣ سم

في Δ أ ب و نحسب أولاً النسبة

$\frac{أ د}{د ب} = \frac{٦}{٥}$ ← (١) ثم نحسب النسبة الثانية

$\frac{أ هـ}{هـ و} = \frac{٣٫٦}{٣} = \frac{٦}{٥}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن

$\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ هـ}{هـ و}$ ∴ (القطع أطوالها متناسبة)

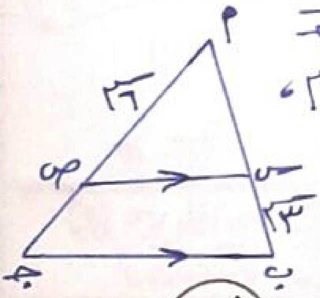
∴ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب و}$ (نستنتج توازي)

مثال (٥) $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

ب س = ٣ سم ، أ ص = ٦ سم ،

$\frac{أ س + أ ص}{أ ب + أ حـ} = \frac{٣}{٥}$

أوجد طول كلاً من $\overline{أ س}$ ، $\overline{حـ ص}$



الحل

∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

∴ $\frac{أ س}{أ ب} = \frac{أ ص}{أ حـ} = \frac{أ س + أ ص}{أ ب + أ حـ}$

تذكر أن

$\frac{مقدم١ + مقدم٢}{تالي١ + تالي٢} =$ نفس النسبة (إحدى النسب)

∵ أس / (أس + ٣) = ٦ / (٦ + ص جـ) = ٣ / ٥

∵ أس / (أس + ٣) = ٣ / ٥ (تضرب مقص)

٥ أس = ٣ أس + ٩

٥ أس − ٣ أس = ٩

٢ أس = ٩ ⟸ أس = ٩ / ٢

∴ أس = ٤,٥

∵ ٦ / (٦ + ص جـ) = ٣ / ٥ (تضرب مقص)

١٨ + ٣ ص جـ = ٣٠

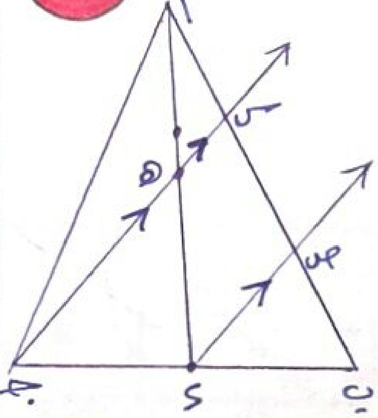
٣ ص جـ = ٣٠ − ١٨

٣ ص جـ = ١٢ ⟸ ص جـ = ١٢ / ٣

∴ ص جـ = ٤ #

مثال (٦) Δ أ ب جـ ، ء ∈ ب جـ بحيث ب ء / ء جـ = ٣ / ٤ ، هـ ∈ أ ء بحيث أ هـ / أ ء = ٣ / ٧ ، رسم جـ هـ فقطع أ ب في س ، رسم ء ص // جـ س فقطع أ ب في ص إثبت أن أ س = ب ص

الحل



في Δ أ ص ء

∵ س هـ // ص ء

∴ أ س / أ ص = أ هـ / أ ء

أ س / أ ص = ٣ / ٧

مقدم / (تالي − مقدم) = ٣ / (٧ − ٣) ⟸ أ س / (أ ص − أ س) = ٣ / (٧ − ٣)

∴ أ س / س ص = ٣ / ٤ ⟵ (١)

في Δ س ب جـ ∵ ص ء // س جـ

∴ ب ص / ص س = ب ء / ء جـ

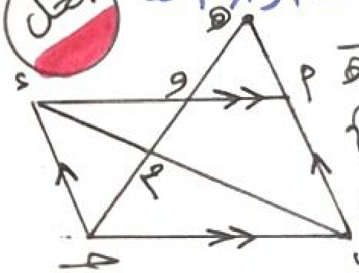
∴ ب ص / ص س = ٣ / ٤ ⟵ (٢)

بمقارنة (١) ، (٢) نجد أن

أ س = ب ص #

مثال (٧) أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب أ ، هـ ∉ أ ب ، رسم هـ جـ فقطع أ ء في و ، ب ء في م إثبت أن : (جـ م)² = م و × م هـ

الحل



أولاً : ∵ ء جـ // ب هـ

، ء ب ∩ جـ هـ = {م}

∴ جـ م / م هـ = ء م / م ب ⟵ (١)

ثانياً : ∵ و ء // ب جـ ،

و جـ ∩ ء ب = {م}

∴ جـ م / و م = ب م / ء م ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

م و / جـ م = ء م / ب م

جـ م / م هـ = م و / جـ م (تضرب مقص)

(جـ م)² = م و × م هـ #

واجب ٦

على نظرية (١) وعكسها

[١] أكمل ما يأتي :-

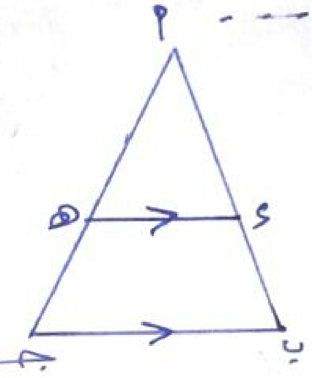
[١] إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه . . . .

. . . .

. . . .

[2] إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه ....

[3] في الشكل المقابل



$\overline{دهـ}$ // $\overline{ب ج}$ فإن

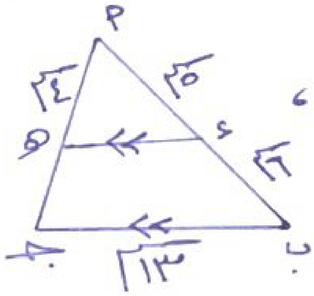
$\frac{د ب}{أ د} = ...$

$\frac{ج هـ}{أ ج} = ...$

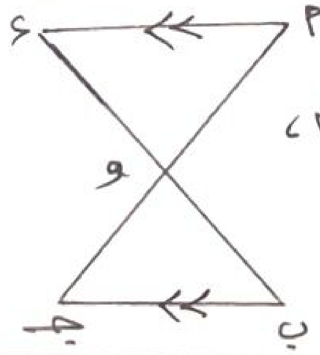
$\frac{أ هـ}{....} = \frac{....}{أ ب} = \frac{د هـ}{.....}$

$\frac{أ د}{....} = \frac{....}{هـ ج} = \frac{أ د + أ هـ}{.....} = \frac{٢ أ د + ...}{٣ هـ ج + ...}$

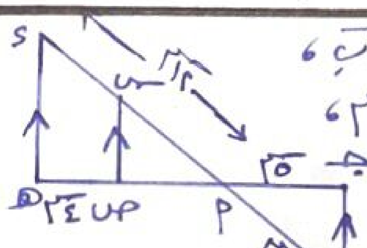
[2] $\overline{دهـ}$ // $\overline{ب ج}$ ، أ د = ٥ سم ، د ب = ٦ سم ، أ هـ = ٤ سم أوجد طول كلاً من $\overline{هـ ج}$ ، $\overline{د هـ}$



[3] $\overline{أ د}$ // $\overline{ب ج}$ ، أ و = ٨ سم ، و ج = ٥ سم ، د ب = ١٢ سم أوجد طول كلاً من $\overline{د و}$ ، $\overline{و ب}$

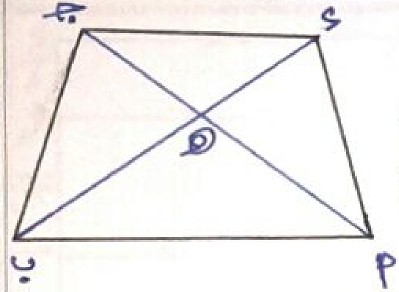


[4] $\overline{س ص}$ // $\overline{د هـ}$ // $\overline{ج ب}$ ، أ د = ١٢ سم ، ص هـ = ٤ سم ، ب أ = ٦ سم ، ج أ = ٥ سم أوجد طول كلاً من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{د س}$



[5] في المثلث أ ب ج ، د ∈ $\overline{أ ب}$ ، هـ ∈ $\overline{أ ج}$ ، ٥ أ هـ = ٤ هـ ج إذا كان أ د = ١٠ سم ، د ب = ٨ سم حدد ما إذا كان $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب ج}$ أم لا.

[6] في الشكل المقابل

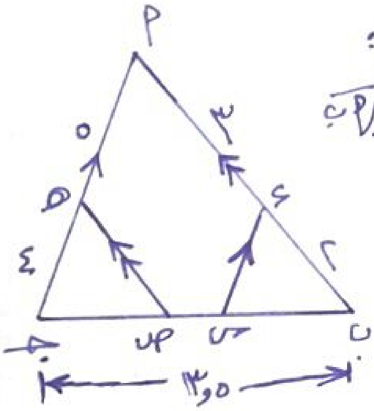


أ هـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ ج = ١٠ سم ، هـ د = ٧,٨ سم

إثبت أن الشكل أ ب ج د شبه منحرف

[7] أ ب ج مثلث ، د ∈ $\overline{أ ب}$ حيث ٣ أ د = ٢ د ب ، هـ ∈ $\overline{أ ج}$ حيث ٥ ج هـ = ٣ أ ج ، رسم $\overrightarrow{أ س}$ فقطع $\overline{ب ج}$ في س فإذا كان أ و = ٢٨ سم ، أ س = ٣٠ سم حيث و ∈ $\overline{أ س}$ إثبت أن النقط د ، و ، هـ على استقامة واحدة

[8] في الشكل المقابل :



$\overline{د س}$ // $\overline{أ ج}$ ، $\overline{هـ ص}$ // $\overline{أ ب}$ ، ب ج = ١٣,٥ سم ، $\frac{أ د}{د ب} = \frac{٣}{٢}$ ، هـ ج = $\frac{٤}{٥}$ أ هـ

أوجد طول $\overline{س ص}$

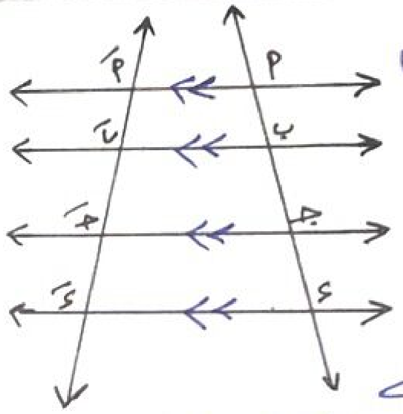
شغل دماغك

اللهم يسر ولا تعسر

أ ب ج د مستطيل تتقاطع قطراه في م ، هـ منتصف $\overline{أ م}$ ، و منتصف $\overline{م ج}$ ، رسم $\overrightarrow{د هـ}$ يقطع $\overline{أ ب}$ في س ، رسم $\overrightarrow{د و}$ يقطع $\overline{ب ج}$ في ص إثبت أن $\overline{س ص}$ // $\overline{أ ج}$

الدرس الثاني
٢ نظرية تاليس
نظرية ٢

في الشكل المقابل



إذا كان $\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{أَ دَ}$

قاطعان لعدة مستقيمات متوازية هي

$\overleftrightarrow{أ أَ} \parallel \overleftrightarrow{ب بَ} \parallel \overleftrightarrow{جـ جـَ} \parallel \overleftrightarrow{د دَ}$

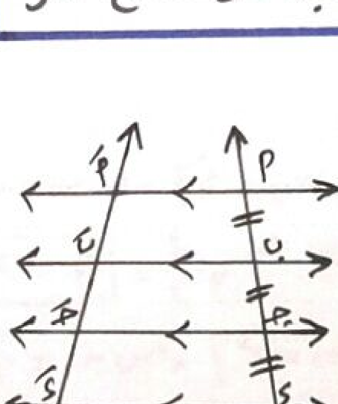
نستنتج أن

$$\frac{أ ب}{أَ بَ} = \frac{ب جـ}{بَ جـَ} = \frac{جـ د}{جـَ دَ} = \frac{أ د}{أَ دَ} = \frac{أ جـ}{أَ جـَ}$$

$$= \frac{ب د}{بَ دَ}$$

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر

حالة خاصة



إذا كان

أ ب = ب جـ = جـ د

نستنتج أن

$\boxed{أَ بَ = بَ جـَ = جـَ دَ}$

إذا كانت القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية في الطول فإن القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية في الطول

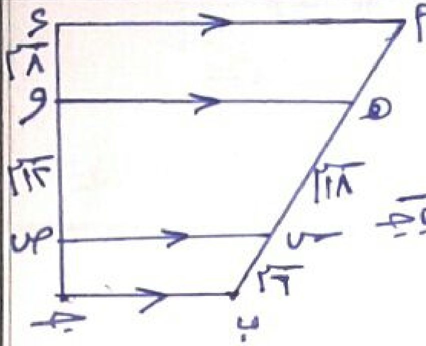
مثال (١)

في الشكل المقابل

$\overline{أ د} \parallel \overline{هـ و} \parallel \overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$

أوجد طول كلاً من

$\overline{أ هـ}$ ، $\overline{جـ ص}$



الحل

$\because \overline{أ د} \parallel \overline{هـ و} \parallel \overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$

$\therefore \frac{أ هـ}{د و} = \frac{هـ س}{و ص} = \frac{س ب}{ص جـ}$

$\frac{أ هـ}{٨} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٦}{ص جـ}$

$\therefore أ هـ = \frac{١٨ \times ٨}{١٢} = ١٢$ سم

$\therefore ص جـ = \frac{٦ \times ١٢}{١٨} = ٤$ سم #

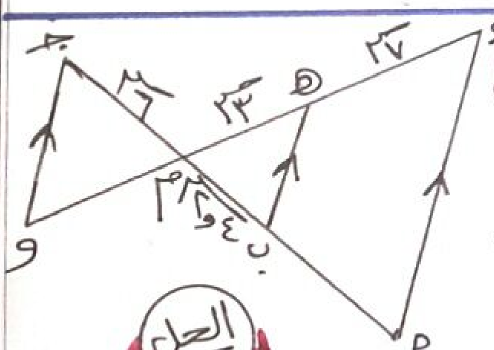
مثال (٢)

في الشكل المقابل

$\overline{أ د} \parallel \overline{ب هـ} \parallel \overline{و جـ}$

أوجد طول كلاً من

$\overline{م و}$ ، $\overline{أ م}$



الحل

$\because \overline{د أ} \parallel \overline{هـ ب} \parallel \overline{جـ و}$

$\therefore \frac{د هـ}{أ ب} = \frac{هـ م}{ب م} = \frac{م و}{م جـ}$

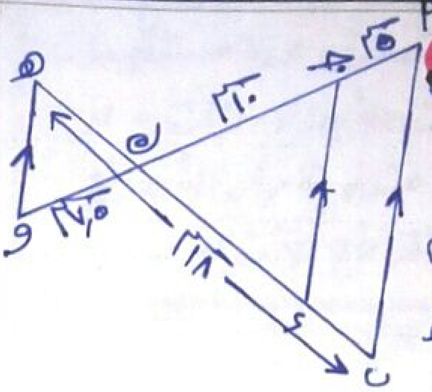
$\frac{٧}{أ ب} = \frac{٣}{٢و٤} = \frac{م و}{٦}$

$\therefore أ ب = \frac{٧ \times ٢و٤}{٣} = ٥و٦$ سم

$\therefore أ م = ٥و٦ + ٢و٤ = ٨$ سم

$\therefore م و = \frac{٣ \times ٦}{٢و٤} = ٧و٥$ سم #

مثال (٣)



$\overline{أب} // \overline{جـ د} // \overline{هـ و}$

أوجد طول كلاً من $\overline{ب د}$ ، $\overline{د ل}$ ، $\overline{ل هـ}$

الحل

∵ $\overline{أب} // \overline{جـ د} // \overline{هـ و}$

∴ $\frac{أ جـ}{ب د} = \frac{جـ ل}{د ل} = \frac{ل و}{ل هـ} = \frac{أ و}{ب هـ}$

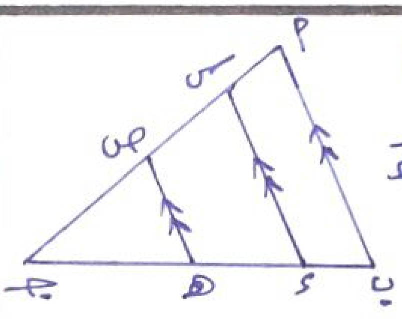
$\frac{٥}{ب د} = \frac{١٠}{د ل} = \frac{٧,٥}{ل هـ} = \frac{٢٢,٥}{١٨}$

∴ $ب د = \frac{١٨ \times ٥}{٢٢,٥} = ٤$ سم

∴ $د ل = \frac{١٨ \times ١٠}{٢٢,٥} = ٨$ سم

∴ $ل هـ = \frac{١٨ \times ٧,٥}{٢٢,٥} = ٦$ سم #

مثال (٤)



$\overline{أب} // \overline{س د} // \overline{ص هـ}$

د هـ = ٧,٥سم ، أس = ٤سم ،

أس : س ص : ص جـ = ٢ : ٣ : ٥

فأوجد طول كل من $\overline{ب د}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{أ جـ}$

الحل

∵ أس : س ص : ص جـ = ٢ : ٣ : ٥

∵ أس = ٤سم

∴ أس = ٢م ، س ص = ٣م ، ص جـ = ٥م

∴ ٤ = ٢م ⟸ م = $\frac{٤}{٢}$ ∴ $\boxed{م = ٢}$

∴ أس = ٤سم ، س ص = ٦سم ، ص جـ = ١٠سم

∵ $\overline{أب} // \overline{س د} // \overline{ص هـ}$

∴ $\frac{أ س}{ب د} = \frac{س ص}{د هـ} = \frac{ص جـ}{هـ جـ}$

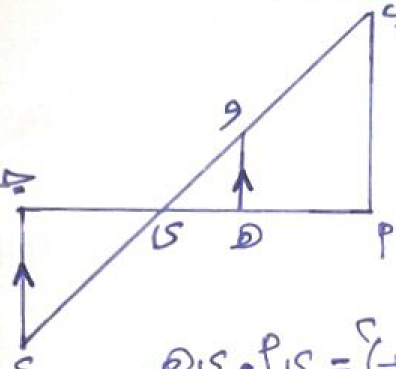
$\frac{٤}{ب د} = \frac{٦}{٧,٥} = \frac{١٠}{هـ جـ}$

∴ $ب د = \frac{٤ \times ٧,٥}{٦} = ٥$ سم

∴ $هـ جـ = \frac{١٠ \times ٧,٥}{٦} = ١٢,٥$ سم

∴ أ جـ = ٤ + ٦ + ١٠ = ٢٠سم #

مثال (٥)



$\overline{هـ و} // \overline{جـ د}$ ، $\frac{أ ى}{ى جـ} = \frac{د ى}{ى و}$ ،

أثبت أن: $(ى جـ)^2 = ى أ \cdot ى هـ$

الحل

∵ $\frac{أ ى}{ى جـ} = \frac{د ى}{ى و}$ ← ①

∵ $\overline{و هـ} // \overline{د جـ}$ من نظرية (١)

∴ $\frac{د ى}{ى و} = \frac{جـ ى}{ى هـ}$ ← ②

من ① ، ② ينتج أن

$\frac{أ ى}{ى جـ} = \frac{جـ ى}{ى هـ}$ (تضرب مقص)

$(جـ ى)^2 = أ ى \cdot ى هـ$ #

واجب ٧

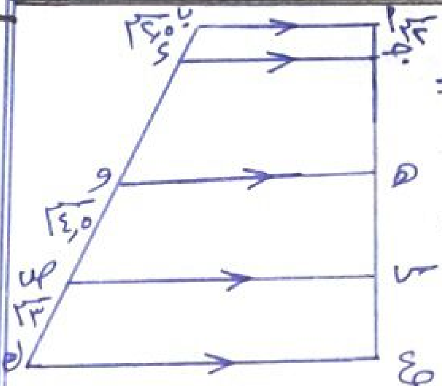
على نظرية تاليس

١ أكمل ما يأتي :-

١ إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال أجزاء القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون ....

(٢) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية وكانت الأجزاء الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن الأجزاء الناتجة على القاطع الآخر تكون ......

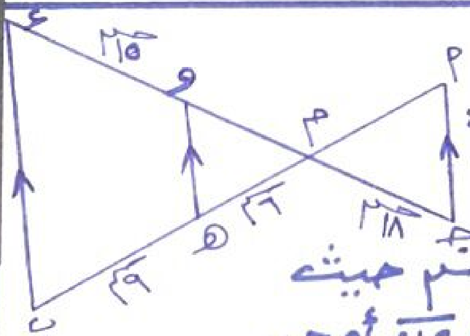
(٢) في الشكل المقابل



أجـ = ٢سم ، ب ء = ٥و٢سم ، و ص = ٥و٤سم ، ص ل = ٣سم ، ع جـ = ١٢سم ، $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{س ص}$ // $\overline{ع ل}$

أوجد طول كل من : $\overline{هـ س}$ ، $\overline{س ع}$ ، $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{ء و}$

(٣) في الشكل المقابل :



من الأطوال المبينة على الرسم حيث $\overline{أجـ}$ // $\overline{و هـ}$ // $\overline{ء ب}$ أوجد

(١) طول $\overline{م و}$ (٢) طول $\overline{أ م}$

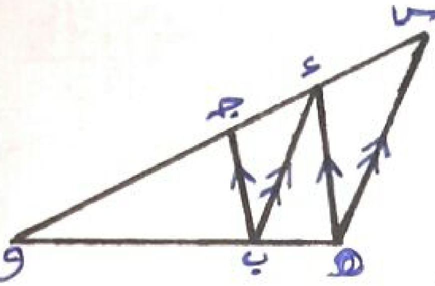
(٤) △ أ ب جـ ، ء ، هـ ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ء س}$ ، $\overleftrightarrow{هـ ص}$ يوازيان $\overline{ب جـ}$ ويقطعان $\overline{أجـ}$ في س ، ص على الترتيب فإذا كان : أء = $\frac{1}{2}$ ب هـ ، ء هـ = ٣ أء ، أجـ = ٢٤ سم فأوجد طول كل من : $\overline{أس}$ ، $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص جـ}$

(٥) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ تقاطع قطراه في م ، نصفت $\overline{ب جـ}$ في هـ ورسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overline{ب م}$ ، ويقطع $\overline{ب ء}$ في س ، $\overline{م جـ}$ في ص ، $\overline{م ء}$ في و ، إثبت أن

(١) هـ ص = $\frac{1}{2}$ أ ب

(٢) $\frac{م ص}{جـ م} = \frac{ب س}{ء م}$

(٦) في الشكل المقابل



$\overline{هـ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{س هـ}$ // $\overline{ء ب}$

إثبت أن

$\left(\frac{و ب}{و هـ}\right)^{2} = \frac{و جـ}{و س}$

الدرس الثالث

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة نظرية (٣)

نظرية (٣)

$\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أجـ

(منصف داخلي)

$\therefore \frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

$\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أجـ الخارجة

(منصف خارجي)

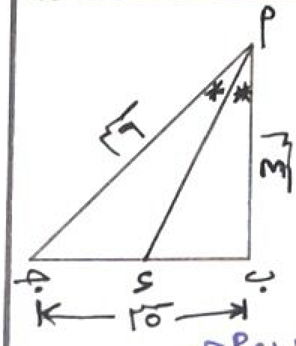
$\therefore \frac{ء جـ}{ء ب} = \frac{أ جـ}{أ ب}$

سبحان الله وبحمده :: سبحان الله العظيم

نظرية (٣)

إذا انصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

مثال (١)



$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

أوجد طول كلاً من $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{ءجـ}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

$\frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} \leftarrow \frac{٤}{٦} = \frac{\text{بء}}{٥ - \text{بء}}$

(نضرب مقص)

∴ ٦ بء = ٢٠ − ٤ بء

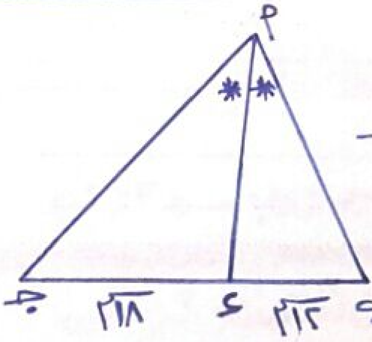
٦ بء + ٤ بء = ٢٠

١٠ بء = ٢٠

بء = $\frac{٢٠}{١٠}$ ∴ $\boxed{\text{بء} = ٢\text{سم}}$

ءجـ = ٥ − ٢ = ٣سم #

مثال (٢)



$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

بء = ١٢سم ، ءجـ = ١٨سم ، محيط Δ أ ب جـ = ٨٠سم

فأوجد طول كل من : $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

$\boxed{\frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}}} = \frac{\text{بأ} + \text{بء}}{\text{أجـ} + \text{ءجـ}} \leftarrow (١)$

∵ محيط المثلث = ٨٠سم ، بجـ = ٣٠سم

∴ أب + أجـ = المحيط − بجـ

أب + أجـ = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠سم

من (١) ∴ $\frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}}$ $\frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}}$

$\frac{\text{بأ} + \text{أجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء} + \text{ءجـ}}{\text{ءجـ}}$

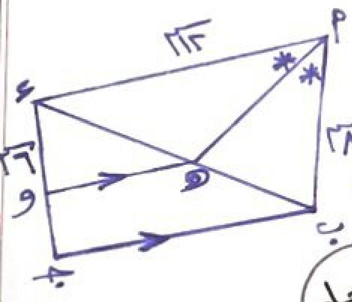
$\frac{٥٠}{\text{أجـ}} = \frac{١٨ + ١٢}{١٨}$

∴ أجـ = $\frac{١٨ \times ٥٠}{١٢ + ١٨}$ = ٣٠سم

∴ أب = المحيط − (أجـ + بجـ)

= ٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ٢٠سم #

مثال (٣)



$\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ،

$\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ،

أب = ٨سم ، أء = ١٢سم ،

ءو = ٦سم ، أوجد

طول : $\overline{\text{ءجـ}}$

الحل

في Δ أ ب ء ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

$\frac{\text{بأ}}{\text{أء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}}$ $\frac{٨}{١٢} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{٢}{٣} \leftarrow (١)$

في Δ ء ب جـ ∵ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{جـو}}{\text{وء}}$ $\frac{٢}{٣} = \frac{\text{جـو}}{٦}$

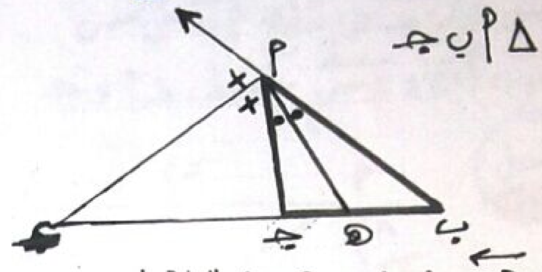
∴ جـو = $\frac{٢ \times ٦}{٣}$ = ٤سم

∴ ءجـ = ٦ + ٤ = ١٠سم #

ملحوظة هامة

[المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث متعامدان]

في △ أ ب جـ



$\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠أ من الداخل

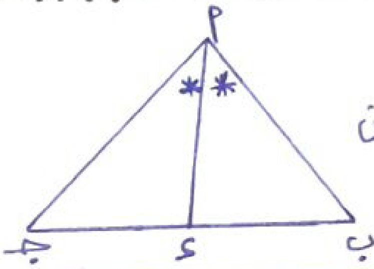
$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الخارج

∴ $\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{أء}}$

طول المنصف الداخلي والخارجي لزاوية رأس المثلث

* في △ أ ب جـ

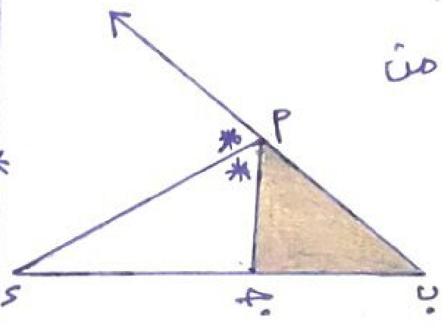
$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الداخل



∴ $\text{أء} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب ء} \times \text{ء جـ}}$

* في △ أ ب جـ

$\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الخارج



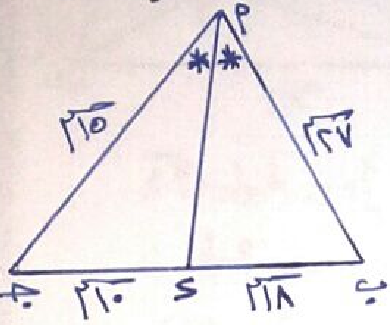
∴ $\text{أء} = \sqrt{\text{ء جـ} \times \text{ء ب} - \text{جـ أ} \times \text{أ ب}}$

قياس الزاوية بين المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث تساوي 90° (قائمة)

مثال (٤)

أ ب جـ مثلث فيه: أب = ٢٧ سم، أجـ = ١٥ سم، رسم $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ء فإذا كان ب ء = ١٨ سم فأوجد طول $\overline{\text{أء}}$

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{جـ أ}}$

$\frac{18}{\text{ء جـ}} = \frac{27}{15} \Leftarrow \text{ء جـ} = \frac{15 \times 18}{27}$

∴ ء جـ = ١٠ سم

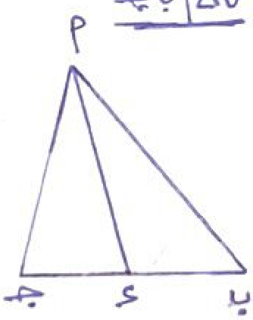
∴ $\text{أء} = \sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ جـ} - \text{ب ء} \times \text{ء جـ}}$

$= \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = 15$ سم

عكس نظرية (٣)

عكس منصف الزاوية

في △ أ ب جـ

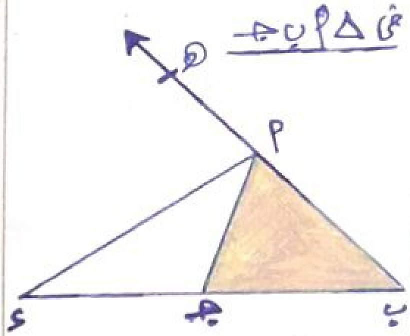


* إذا كان $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$

∴ نستنتج أن $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ جـ من الداخل

∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (منصف داخلي)

في △ أ ب جـ



* إذا كان $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{أ ب}}$

∴ نستنتج أن $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الخارج

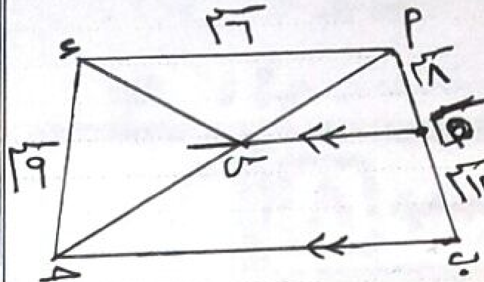
∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠جـ أ هـ

∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ (منصف خارجي)

مثال (٥)

أ ب جـ د شكل رباعي فيه:
أ ب = ٢٠ سم ، أ د = ٢٦ سم ، د جـ = ٣٩ سم ،
هـ ∈ أ ب بحيث أ هـ = ٨ سم ، و
هـ س // ب جـ ويقطع أ جـ في س
اثبت أن: د س ينصف ∠ أ د جـ

الحل



في Δ أ ب جـ ∵ هـ س // ب جـ

∴ $\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{أ س}{س جـ}$ ← نظرية (١)

$\frac{٨}{١٢} = \frac{أ س}{س جـ} \Leftarrow \frac{أ س}{س جـ} = \frac{٢}{٣}$ (١)

في Δ أ د جـ $\frac{أ د}{د جـ} = \frac{٦}{٩}$

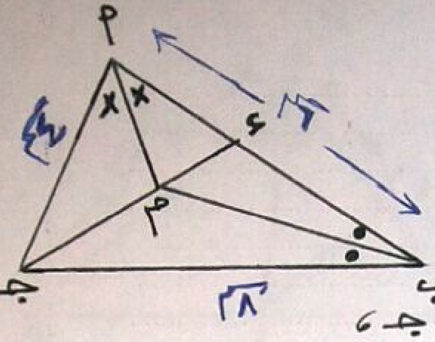
∴ $\frac{أ د}{د جـ} = \frac{٢}{٣}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{أ س}{س جـ} = \frac{أ د}{د جـ}$

∴ د س ينصف ∠ أ د جـ #

مثال (٦)



أ ب = ٣٦ سم ،
أ جـ = ٢٤ سم ،
ب جـ = ٢٨ سم ،
ب م ينصف ∠ أ ب جـ ،
أ م ينصف ∠ ب أ جـ أوجد طول: أ د

الحل

∵ أ م ينصف ∠ ب أ جـ ،
∵ ب م ينصف ∠ أ ب جـ ،
∵ أ م ∩ ب م = {م}
∴ م هي نقطة تقاطع منصفات Δ أ ب جـ
∴ جـ م ينصف ∠ أ جـ ب

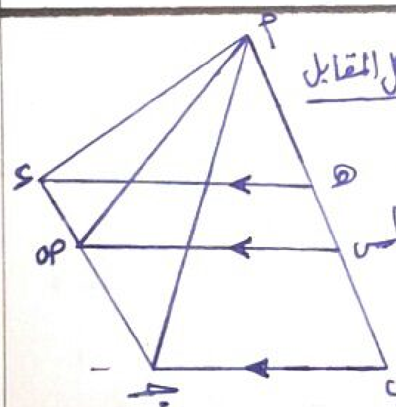
∴ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ جـ}{جـ ب}$

$\frac{أ د}{٦ - أ د} = \frac{٤}{٨}$

∴ ٨ أ د = ٢٤ - ٤ أ د
∴ ٨ أ د + ٤ أ د = ٢٤
١٢ أ د = ٢٤ ⇐ أ د = $\frac{٢٤}{١٢}$
∴ أ د = ٢ سم

مثال (٧)

في الشكل المقابل



هـ د // س ص // ب جـ ،
$\boxed{أ د × ب س = أ جـ × هـ س}$
اثبت أن
أ ص ينصف
∠ جـ أ د

الحل

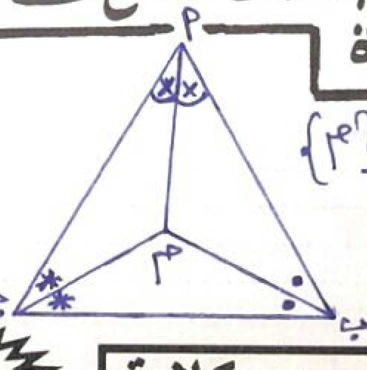
∵ هـ د // س ص // ب جـ
من نظرية تاليس $\frac{هـ س}{د ص} = \frac{س ب}{ص جـ}$ $\frac{مقطع}{مقطع} = \frac{تالي}{تالي}$

$\boxed{\frac{هـ س}{س ب} = \frac{د ص}{ص جـ}}$ ⇐ (١)

ملحوظة هامة

منصفات زوايا المثلث

منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة



ب م ∩ جـ م ∩ أ م = {م}

∵ $أد \times ب س = أجـ \times هـ س$ معطى

∴ $\boxed{\frac{أد}{أجـ} = \frac{هـ س}{ب س}}$ ← ②

من ① ، ② ينتج أن

$\frac{أد}{أجـ} = \frac{د ص}{ص جـ}$

∴ $\overleftarrow{أص}$ ينصف ∠ جـ أ د #

واجب ٨ على منصف الزاوية وعكسها

١ أكمل ما يأتي :-

١ إذا نصفت زاوية رأس مثلث قسم المنصف قاعدة المثلث إلى ....

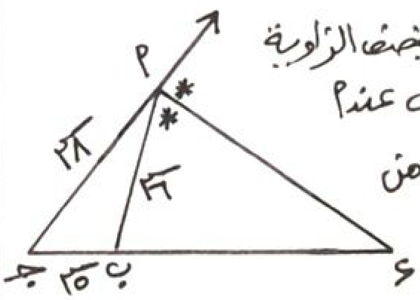
٢ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث يكونان ....

٣ منصف الزاوية الخارجة لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون .....

٤ في Δ أ ب جـ إذا كان : $\overleftarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في د وكان أ جـ < أ ب ، فإن : ب د ...... د جـ

٥ منصفات زوايا المثلث تتقاطع في ....

٢ Δ أ ب جـ ، $\overleftarrow{أد}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ أوجد طول كل من $\overline{ب د}$ ، $\overline{أد}$

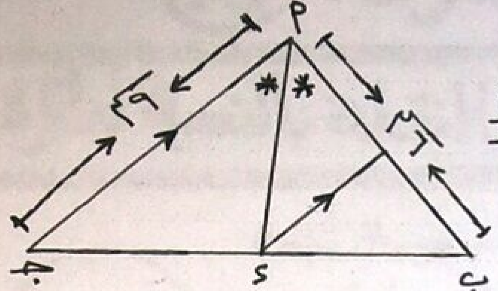


٣ $\overleftarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overline{هـ د} // \overline{أ جـ}$

إثبت أن

$\frac{ب هـ}{أ هـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

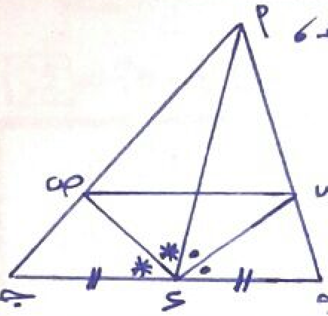
وإذا كان



أ جـ = ٣٩ سم ، أ ب = ٣٦ سم أوجد طول كل من : $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$

٤ $\overleftarrow{أد}$ متوسط في Δ أ ب جـ ، $\overleftarrow{د س}$ ينصف ∠ أ د ب ، $\overleftarrow{د ص}$ ينصف ∠ أ د جـ

إثبت أن $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$



٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسم $\overleftarrow{أد}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في د ، إذا كان طول ب د = ٢٤ سم ، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط : Δ أ ب جـ

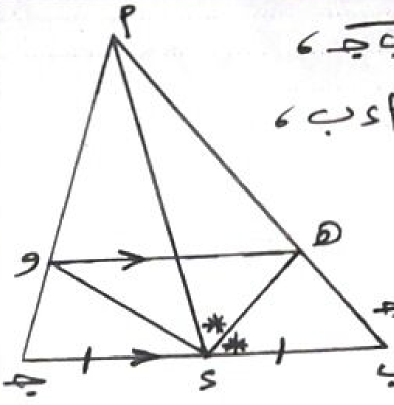
٦ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ٢٨ سم ، أ جـ = ٢٤ سم ، ب جـ = ٣٦ سم ، رسم $\overleftarrow{أد}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في د ورسم $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجية ويقطع $\overleftarrow{ب جـ}$ في هـ أوجد طول كل من : $\overline{د هـ}$ ، $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ هـ}$

٧ أ ب جـ مثلث ، نصفت ∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ بالمنصفات $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{ب هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ و}$ فقطعت $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ب}$ في د ، هـ ، و على الترتيب إثبت أن : $\frac{ب د}{د جـ} \times \frac{جـ هـ}{هـ أ} \times \frac{أ و}{و ب} = 1$

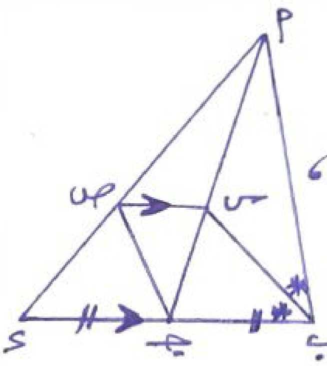
٨ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أ ب = ب د ، أ د = د جـ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ د ويقطع $\overline{ب د}$ في هـ ، $\overleftarrow{د و}$ ينصف ∠ ب د جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في و ، إثبت أن $\overline{هـ و} // \overline{د جـ}$

٩ أ ب جـ د شكل رباعي فيه: أ ب = ١٨ سم، ب جـ = ١٢ سم، هـ ∈ أ د بحيث ٢ أ هـ = ٣ هـ د، رسم هـ و // د جـ فقطع أ جـ في و. إثبت أن: ب و ينصف ∠ أ ب جـ

١٠ د منتصف ب جـ، د هـ ينصف ∠ أ د ب، هـ و // ب جـ. إثبت أن:
① د و ينصف ∠ أ د جـ
② هـ د ⊥ د و

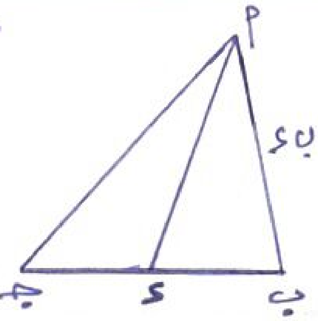


١١ أ ب = أ جـ، ب جـ = جـ د، ب س ينصف ∠ أ ب جـ، س ص // ب د. إثبت أن: جـ ص ينصف ∠ أ جـ د



١٢ أ ب جـ مثلث، د ∈ ب جـ، د ∉ ب جـ حيث جـ د = أ ب، رسم جـ هـ // د أ ويقطع أ ب في هـ، ورسم هـ و // ب جـ ويقطع أ جـ في و. إثبت أن: ب و ينصف ∠ أ ب جـ

١٣ في الشكل المقابل:
إذا كان أ جـ : د جـ : أ ب : ب د = ١٥ : ١٠ : ٩ : ٦
فأثبت أن: أ د ينصف ∠ ب أ جـ

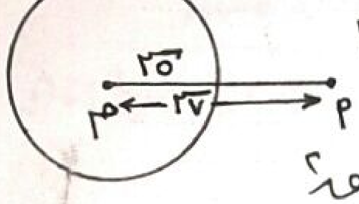


الحمد لله ∴ الله أكبر

الدرس الرابع

قوة النقطة بالنسبة لدائرة

$\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ})$ ← قوة النقطة أ بالنسبة م



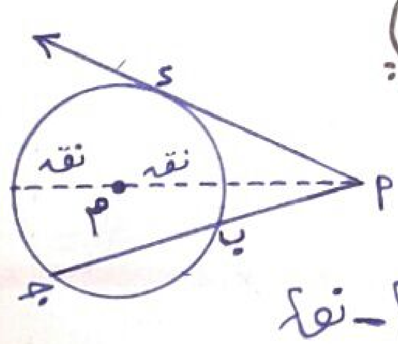
$\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أم})^2 - \text{نق}^2$

$= (٧)^2 - (٥)^2 = ٤٩ - ٢٥ = \boxed{٢٤}$

> قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ})$ حيث $\boxed{\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أم})^2 - \text{نق}^2}$

* إذا كان
① $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) > \text{صفر}$ ∴ أ تقع خارج الدائرة
② $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = \text{صفر}$ ∴ أ تقع على الدائرة
③ $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) < \text{صفر}$ ∴ أ تقع داخل الدائرة

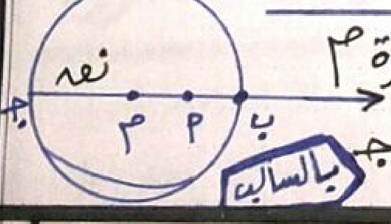
ملحوظة هامة



أ د مماس للدائرة عند د

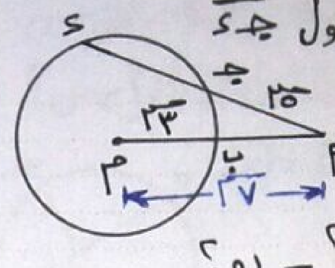
$\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أم})^2 - \text{نق}^2$
$= \text{أب} \times \text{أجـ}$
$= (\text{أد})^2$

← إذا كانت أ داخل الدائرة م



∴ $\text{ق}_{\text{م}}(\text{أ}) = - \text{أب} \times \text{أجـ}$ بالسالب

مثال (١) أوجد طول جـ د



الحل

$ق_م(أ) = (أم)^2 - نق^2$

$= (٧)^2 - (٣)^2 = ٤٩ - ٩$

$\therefore ق_م(أ) = ٤٠$

$\because ق_م(أ) = أجـ \times أد$

$\frac{٤٠}{٥} = \frac{\cancel{٥} \times أد}{\cancel{٥}}$

$\therefore$ أد = ٨ سم

$\therefore$ جـ د = أد − أجـ = ٨ − ٥

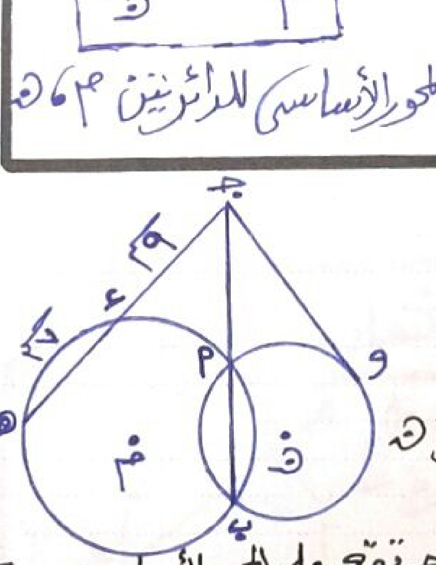
$\therefore$ جـ د = ٣ سم #

* إذا كانت أ لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين فإن أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

أي أنه إذا كان $\boxed{ق_م(أ) = ق_ن(أ)}$

$\therefore$ أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

مثال (٢)



جـ د = ٩ سم ،

د هـ = ٧ سم ،

$\overleftrightarrow{جـ و}$ مماس للدائرة ن عند و

① إثبت أن: جـ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

② إذا كان أب = ١٠ سم أوجد طول كل من: أجـ ، جـ و

الحل

$\because$ أ تقع على الدائرتين م ، ن

$\therefore ق_م(أ) = ق_ن(أ) =$ صفر

$\because$ ب تقع على الدائرتين م ، ن

$\therefore ق_م(ب) = ق_ن(ب) =$ صفر

$\therefore \overleftrightarrow{أب}$ هو محور أساسي للدائرتين م ، ن

$\because جـ \in \overleftrightarrow{أب}$

$\therefore$ جـ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

$ق_م(جـ) = جـ د \times جـ هـ$

$= ٩ \times ١٦ = ١٤٤$

$ق_م(جـ) = جـ أ \times جـ ب$

$\therefore ١٤٤ = جـ أ (جـ أ + ١٠)$

$(جـ أ)^2 + ١٠ جـ أ - ١٤٤ =$ صفر

$(جـ أ - ٨)(جـ أ + ١٨) =$ صفر

$\boxed{جـ أ = ٨ \text{ سم}}$ جـ أ = −١٨ مرفوض

$\because ق_ن(جـ) = ق_م(جـ)$ لأنها على المحور الأساسي

$\therefore ق_ن(جـ) = (جـ و)^2$

$١٤٤ = (جـ و)^2$

$\therefore$ جـ و = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم #

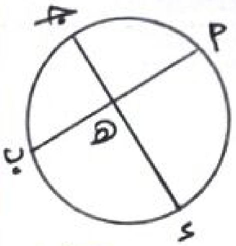
تمارين مشهورة

على القاطع والمماس وقياسات الزوايا

١ إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياس

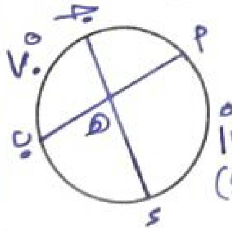
القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس"

← إذا كان أب ∩ جـد = {هـ}



∴ ق(∠أهـد)

= $\frac{1}{2}$ ق(أد⌒) + $\frac{1}{2}$ ق(جـب⌒)



أوجد ق(∠أهـد)

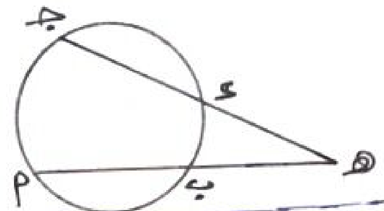
الحل

ق(∠أهـد) = $\frac{1}{2}$ ق(أد⌒) + $\frac{1}{2}$ ق(جـب⌒)

= ٦٠° + ٣٥°

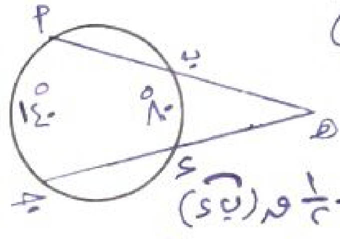
= ٩٥°

تمرين مشهور ٢



$\boxed{\text{ق(∠هـ)} = \frac{1}{2}\text{ ق(أجـ⌒)} - \frac{1}{2}\text{ ق(دب⌒)}}$

مثال أوجد ق(∠هـ)



الحل

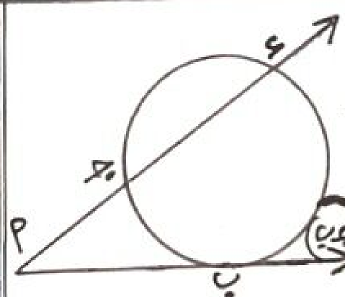
ق(∠هـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أجـ⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(بد⌒)

= ٧٠° − ٤٠° = ٣٠°

نتائج على التمارين المشهورة

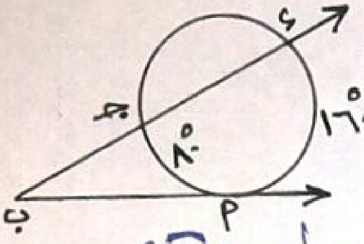
١) أب مماس عند (ب)

أد قاطع للدائرة عند د، جـ



∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(بد⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(بجـ⌒)

مثال أوجد ق(∠ب)

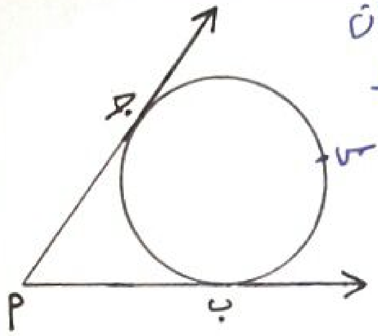


الحل

ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أد⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(أجـ⌒)

= ٨٠° − ٤٠° = ٤٠° #

٢) أب، أجـ مماسان للدائرة عند ب، جـ



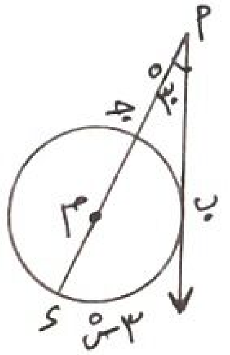
∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(بجـ⌒) الأكبر − $\frac{1}{2}$ ق(بجـ⌒) الأصغر

= $\frac{1}{2}$ ق(بسجـ⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(بجـ⌒)

مثال: أب مماس للدائرة عند ب

ق(∠أ) = ٣٠°، ق(بد⌒) = ٣س°

أوجد قيمة: س



الحل

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(بد⌒) − $\frac{1}{2}$ ق(بجـ⌒)

∴ ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × ٣س° − $\frac{1}{2}$ × [١٨٠° − ٣س°]

٣٠° = $\frac{3}{2}$ س° − ٩٠° + $\frac{3}{2}$ س°

٣٠° = ٣س° − ٩٠°

٣س° = ٣٠° + ٩٠°

$\frac{\cancel{3}\text{س}°}{\cancel{3}} = \frac{120}{3}$

∴ $\boxed{\text{س}° = ٤٠}$

∴ $\boxed{\text{س}° = ٤٠°}$

* لاحظ أن ق(دبجـ⌒) = ١٨٠°

نصف دائرة

واجب ٩

على تطبيقات على التناسب في الدائرة

[١] أكمل ما يأتي :-

١) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة فإن : أ تقع ...... الدائرة

٢) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة في مستويها بحيث قم(أ) = ٠ فإن : أ تقع ..... الدائرة

٣) إذا كانت م دائرة نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في مستويها بحيث م أ = ٤ سم فإن : قم(أ) = ...

٤) إذا كانت ن دائرة طول قطرها ١٦ سم ، ب نقطة في مستويها بحيث ن ب = ٥ سم فإن : قن(ب) = ...

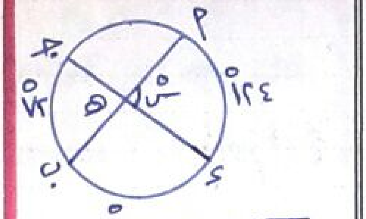
٥) إذا كانت قوة نقطة بالنسبة لدائرة م تساوي - ٦٢٥ بعد هذه النقطة عن مركز الدائرة يساوي ٢٥ سم فإن طول قطر هذه الدائرة يساوي ...... سم

٦) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة في مستويها بحيث م أ = ٦ سم ، قم(أ) = -١٣ فإن مساحة هذه الدائرة = ... ومحيطها = ...

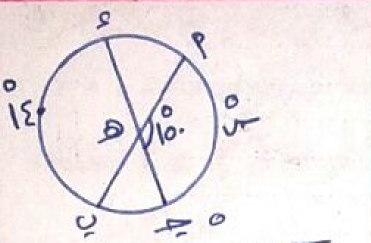
٧) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستويها تبعد عن مركز الدائرة ٢٤ سم فإن : طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ للدائرة م هو ..... سم

٨) إذا كانت قم(أ) = صفر فإن أب × أجـ = ... حيث (ب ، جـ ∈ للدائرة م)

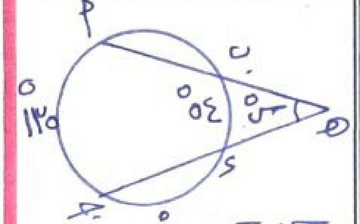
[٢] أوجد قيمة س بالدرجات في كلاً مما يأتي



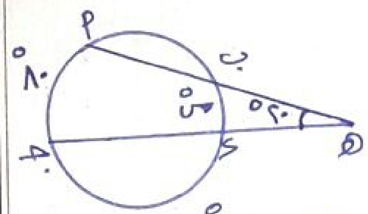
س = ...



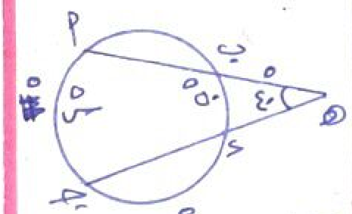
س = ...



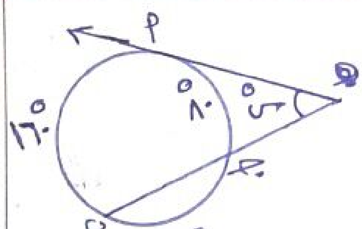
س = ...



س = ...



س = ...

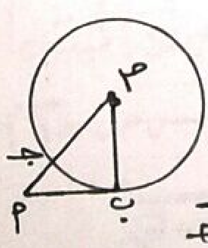


س = ...

٣) إذا كان بعد النقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوي ٤٠٠ أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

٤) إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م ، أ د مماسة للدائرة عند د بحيث أ د = ٨ سم فأوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م.

٥) في الشكل المقابل

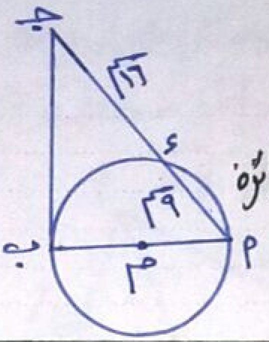


أب تمس الدائرة م عند ب ، طول نصف قطر الدائرة = ١٢ سم ، قم(أ) = ٨١ فأوجد

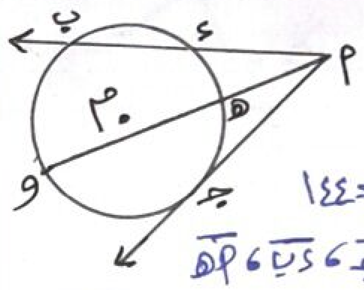
(١) طول أب (٢) طول أجـ

"يا أرحم الراحمين إرحمنا"

٦ أب قطر في الدائرة م
جـب مماس للدائرة عند ب
أوجد ① طول نصف قطر الدائرة
② مساحة Δ أ ب جـ



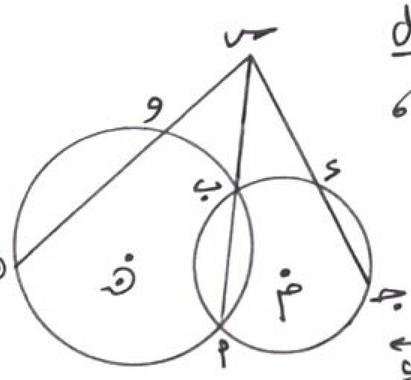
٧ أء = ٨ سم ،
هـو = ١٨ سم ،



١ إذا كان ق(أ) = ١٤٤ م
فأوجد طول كل من أجـ ، ءب ، أهـ

٢ إذا كان س ∈ بء حيث ءس = ٤ سم
فأوجد ق(س) م

٨ في الشكل المقابل



س ء = ٣ ء جـ ،
هـو = ١٠ سم ،
قهـ(س) = ١٤٤

① إثبت أن أب محور أساسي للدائرتين م ، ن
② أوجد طول كل من س جـ ، س و
③ إثبت أن الشكل جـ ء و هـ رباعي دائري

اختبارات على التناسب وتطبيقاته

اختبار (١)

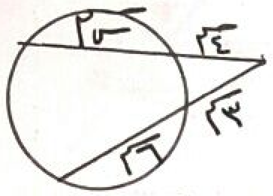
١ أكمل ما يأتي :-

١ المنصفان الداخلي والخارجي عند زاوية رأس المثلث يكونان ......

٢ إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية وكانت أجزاء القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية في الطول فإن الأجزاء الناتجة على القاطع الآخر تكون ......

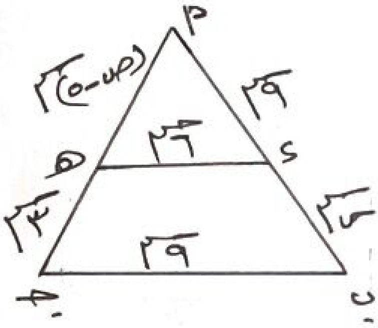
٣ دائرة م نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٧ سم فإن قم(أ) = ...

٤ في الشكل المقابل
س = ... سم

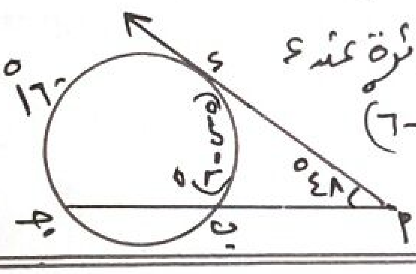


٥ إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث فإنه ......

٢ (أ) ءهـ // بجـ
من الأطوال الموضحة بالرسم احسب قيمة كل من ص ، س



(ب) أء مماس للدائرة عند ء
ق(ءب) = (٥س - ٦)°
أوجد قيمة س

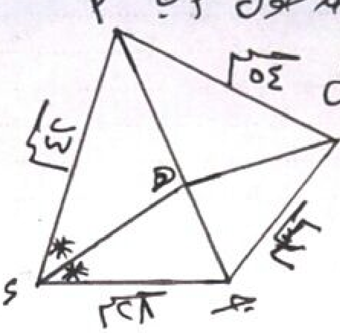


٣ س ص ع مثلث نصفت زاوية ص بمنصف قطع سع في م ، ثم رسم م ن // ع ص فقطع س ص في ن إثبت أن
$\frac{س ص}{ص ع} = \frac{س ن}{ن ص}$ وإذا كان س ص = ٦ سم ،
ص ع = ٤ سم فأوجد طول: س ن

"وإنك لعلى خلق عظيم" (صلى الله عليه وسلم)

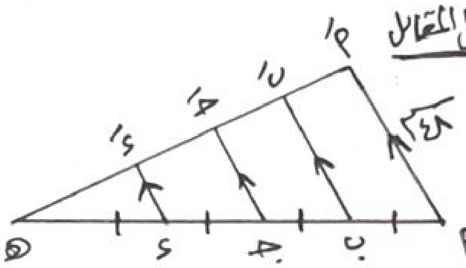
[٤] (أ) أب ، جـ د وتران متقاطعان في هـ
فإذا كانت هـ منتصف أب ، جـ هـ = ٤ سم
، هـ د = ٩ سم فأوجد طول أب

(ب) في الشكل المقابل



د هـ يُنصف ∠ أ د جـ
، أ د = ٤٢ سم
، د جـ = ٢٨ سم ،
ب جـ = ٣٦ سم ، أ ب = ٥٤ سم . اثبت أن
ب هـ يُنصف ∠ أ ب جـ

[٥] في الشكل المقابل



أأَ // ب بَ // جـ جَـ // د دَ ، أأَ = ٤٨ سم
أوجد طول د دَ

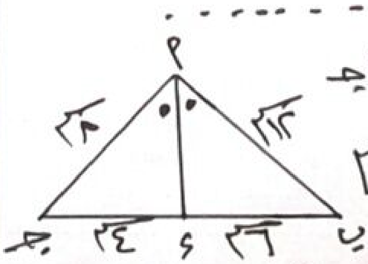
اختبار ٢

[١] أكمل ما يأتي :-

① إذا كان $ق_م(أ) >$ صفر فإن أ تقع ....

② إذا كان أجـ ∩ ب د = {م} وكان
م أ × م جـ = م ب × م د فإن
الشكل أ ب جـ د ....

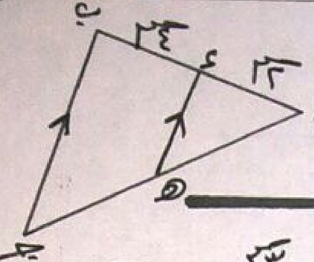
③ أد يُنصف ∠ ب أ جـ



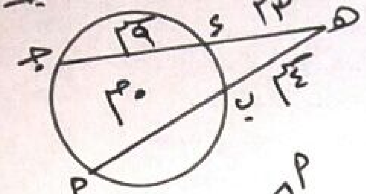
∴ أد = ... سم

④ إذا كانت $ق_م(أ) =$ صفر فإن أ تقع ......

[٥] إذا كان أجـ = ٩ سم ،
فإن هـ جـ = ... سم

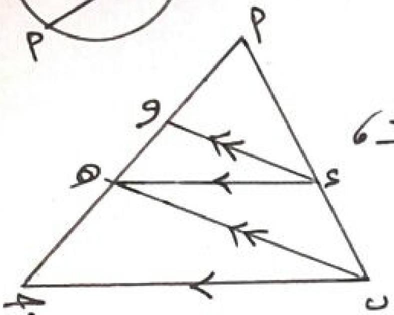


[٢] (أ) في الشكل المقابل



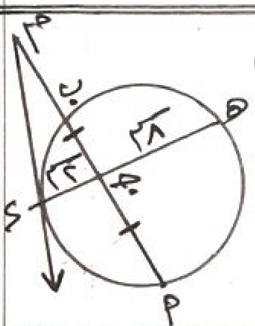
أوجد طول أب ،
$ق_م(هـ)$

(ب) د هـ // ب جـ ،
د و // ب هـ ،
اثبت أن

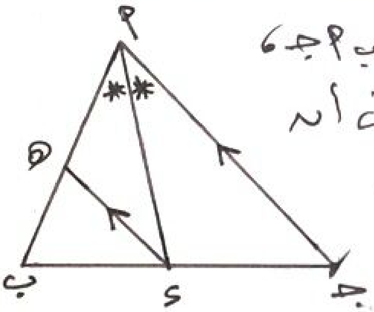


$\frac{أو}{و هـ} = \frac{أهـ}{هـ جـ}$ وإذا كان أو = ٢ سم ، هـ جـ = ٤ سم ،
أوجد طول : و هـ

[٣] م أ = م ب ، جـ د = ٢ سم ،
جـ هـ = ٨ سم ، م د مماس
للدائرة ، م ب = $\frac{1}{2}$ أ ب
أوجد طول جـ م



[٤] أد يُنصف ∠ ب أ جـ ،
د هـ // أجـ اثبت أن
$د هـ = \frac{أب \times أجـ}{أب + أجـ}$



[٥] أب قطر في دائرة ، أجـ وتر فيها ، رُسم جـ د
مماساً للدائرة عند جـ فقطع أب في د . إذا
كانت هـ ∈ أب بحيث $\frac{د ب}{ب هـ} = \frac{د جـ}{جـ هـ}$
اثبت أن : ① جـ ب يُنصف الزاوية الخارجة
للمثلث جـ د هـ عند جـ
② $\frac{د أ}{د ب} = \frac{أهـ}{ب هـ}$