أحمد الشنتورى
الإميل : a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

موجه رياضيات
منتدى الشنتورى للرياضيات :

إدارة كوم أمبو التعليمية
http://shantory.yoo٧.com/forum.htm

مفكرة قوانين الإستاتيكا

القوى المتلاقية فى نقطة :

* محصلة قوتين جبرياً : $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{١} ق_{٢} \text{ حتا } ى$

، $\text{طا } هـ = \frac{ق_{٢} \text{ حا } ى}{ق_{١} + ق_{٢} \text{ حتا } ى}$

حيث : ى الزاوية بين القوتين ، هـ الزاوية بين المحصلة و القوة الأولى

* حالات خاصة :

* القوتان لهما نفس خط العمل و فى نفس الإتجاه :

$\therefore ى = ٠^{\circ} \quad \therefore ح = ق_{١} + ق_{٢}$ " أكبر قيمة للمحصلة "

* القوتان لهما نفس خط العمل و فى إتجاهين متضادين :

$\therefore ى = ١٨٠^{\circ} \quad \therefore ح = |ق_{١} - ق_{٢}|$ " أصغر قيمة للمحصلة "

* القوتان متعامدتان : $\therefore ى = ٩٠^{\circ} \quad \therefore ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢}$

، $\text{طا } هـ = \frac{ق_{٢}}{ق_{١}}$

* القوتان متساويتان فى المقدار : $ق_{١} = ق_{٢} = ق$

$\therefore ح = ٢ ق \text{ حتا } \frac{ى}{٢} \quad ، \quad هـ = \frac{ى}{٢}$

* تحليل قوة فى إتجاهين معلومين :

$ق_{١} = \frac{ح \text{ حا } هـ_{٢}}{\text{حا } (هـ_{١} + هـ_{٢})} \quad ، \quad ق_{٢} = \frac{ح \text{ حا } هـ_{١}}{\text{حا } (هـ_{١} + هـ_{٢})}$

حيث : $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ الزاويتين بين المحصلة و القوتين على الترتيب

* تحليل قوة فى إتجاهين متعامدين :

$ح^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} \quad ، \quad \text{طا } هـ = \frac{ص}{س}$

حيث : س المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$

، ص المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه $\overleftarrow{و ص}$

توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة :

* توازن قوتين : إذا أتزن جسم تحت تأثير قوتين فقط تكون القوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و يكون خط عملهما واحد

* توازن ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة :

إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تكون مساوية فى المقدار لمقدار القوة الثالثة و مضادة لها فى الإتجاه و لهما نفس خط العمل

* إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

* لكى تتزن ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث

* إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية بحيث إلتقى خطا عمل أثنين منها فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد و أن يمر بهذه النقطة

* قاعدة مثلث القوى : إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث و فى إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة

* قاعدة لامى : إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

* توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة :

إذا أتزنت مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة فإن المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى كل من إتجاهين متعامدين يتلاشى

أى أن : إذا أتزنت مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة

فإن : $س = ٠$ ، $ص = ٠$ ، و بالتالى : $ح = ٠$

* الضرب القياسى لمتجهين

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ ب حتا هـ}$
حيث : $٠ \le \text{هـ} \le ١٨٠^\circ$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{١}\,\text{ب}_{١} + \text{أ}_{٢}\,\text{ب}_{٢}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = ٠ \Longrightarrow \overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}^{٢}$

* $\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = ١$

* $\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = ٠$

* المسقط الجبرى لـ $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$
$= \text{ق حتا هـ} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

* المركبة الجبرية لـ $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$
$= \left(\dfrac{\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}}{\text{أ}^{٢}}\right) \overleftarrow{\text{أ}}$

* الضرب الإتجاهى لمتجهين

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب حا هـ})\,\overleftarrow{\text{ى}}$
، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة ⊥ مستوى $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{١}\,\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\,\text{ب}_{١})\,\overleftarrow{\text{ع}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{٠} \Longrightarrow \overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -\,(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$

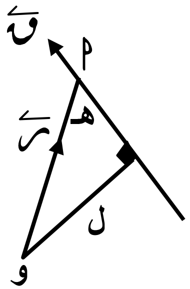
* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{٠}$

* $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ص}}$
$= \overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{٠}$

* $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}}$
، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}}$
، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{س}} = -\,\overleftarrow{\text{ع}}$
، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = -\,\overleftarrow{\text{س}}$ ، ....

* المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين أ ب حا هـ = مساحة متوازى الأضلاع = ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ضلعين متجاورين

* عزم قوة بالنسبة لنقطة :



هو مقدار القوة على إحداث دوران حول هذه النقطة

* عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة " و " :
$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{و أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$
$\|\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\| = \text{ر ق حا هـ} = \text{ق ل}$

* عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لأى نقطة على خط عمل القوة
أى أن : لا يتغير عزم القوة إذا نقلنا نقطة تأثيرها لأى نقطة أخرى على خط عمل القوة
* عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى
* عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

* إذا كان : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{أ}}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

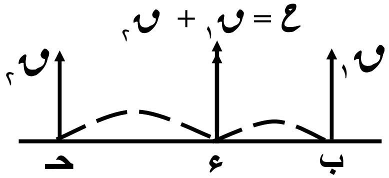
* إذا كان : $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = -\,\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{أ}}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ ينصف $\overline{\text{أ ب}}$

* نظرية العزوم :

مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة أى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

* محصلة قوتين متوازيتين :

* القوتان متحدا الإتجاه :

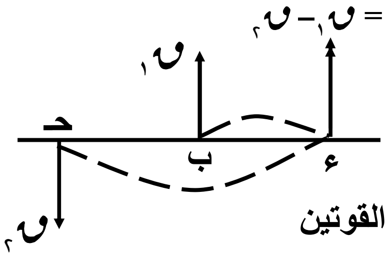


$ح = ق_{١} + ق_{٢}$

خط عمل المحصلة فى نفس الإتجاه

$ق_{١} \times ب ء = ق_{٢} \times ء حـ$

* القوتان فى إتجاهين متضادين :



$ح = ق_{١} - ق_{٢}$ حيث : $ق_{١} > ق_{٢}$

خط عمل المحصلة فى نفس الإتجاه

$ق_{١} \times ب ء = ق_{٢} \times ء حـ$

* إذا كان : $ق_{١} = ق_{٢} = ق$ و فى نفس إتجاه القوتين

فإن : $ح = ٢ ق$ و خط عملها ينصف المسافة بين خطا عمليهما

* إذا كان : $ق_{١} = ق_{٢} = ق$ و فى نفس إتجاهين متضادين

فإنه : يحدث دوران للجسم و لا توجد محصلة

* إذا علم ح ، $ق_{١}$:

* و إذا كانتا فى إتجاهين متضادين فإن : $ق_{٢} = ح + ق_{١}$

و خط عمل $ق_{٢}$ يقع بين خطى عمل $ق_{١}$ ، ح و فى إتجاه خط عمل ح

* و إذا كانتا فى إتجاه واحد فإن :

* إذا كان : $ح > ق_{١}$ فإن : $ق_{٢} = ح - ق_{١}$ ، و خط عمل $ق_{٢}$ يقع بين خطى عمل $ق_{١}$ ، ح ناحية ح و فى إتجاه ح

* إذا كان : $ح < ق_{١}$ فإن : $ق_{٢} = ق_{١} - ح$ ، خط عمل $ق_{٢}$ يقع خارج خطى عمل $ق_{١}$ ، ح ناحية $ق_{١}$ و فى إتجاه ح

* محصلة عدة قوى متوازية :

القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة

* توازن أكثر من ثلاث قوى متوازية مستوية :

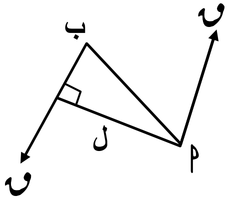
إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :

١ – مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر
٢ – مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر

* الإزدواج : هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد

* عزم الإزدواج : عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى

$\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق}$ ، $\|\overleftarrow{ج}\| = ق \times ل$



* إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج : كما فى العزوم

* توازن إزدواجين : يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان :

$ج_{١} + ج_{٢} = صفر$ أو $ج_{١} = - ج_{٢}$

* الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج

* تكافؤ إزدواجين :

يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان : $ج_{١} = ج_{٢}$

* الإزدواج لا يكافئ إلا إزدواج

* مجموع إزدواجين أو أكثر " الإزدواج المحصل " : $ج = ج_{١} + ج_{٢} + ٠٠٠٠ + ج_{ن}$

* قاعدة هامة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث (مضلع مقفل) مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث (المضلع) × م

حيث : م = مقدار القوة ÷ طول الضلع الممثل لها